UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

RAQUEL SANTIAGO FREIRE

FORTALEZA - CEARÁ

2007

Raquel Santiago Freire

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação, do Núcleo Educação Currículo e Ensino e da Linha de Pesquisa Novas Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação.

Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

Fortaleza
2007

Raquel Santiago Freire

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL.

Fortaleza, 01 de março de 2007

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Presidente)
Universidade Federal do Ceará

Profª. Drª. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes
Universidade Estadual do Ceará

Profª. Drª. Ana Karina Morais de Lira
Universidade Federal do Ceará

Á Deus e ao meu pai José Neuton,
pois os sinto sempre presente em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Eliane, pelo carinho e pela busca de querer sempre o melhor para mim.

Ao meu irmão, Alexandre, pela amizade verdadeira e confiança.

À minha irmã, Renata, pela força e coragem de enfrentar o mundo.

A Maria das Neves, carinhosamente chamada de Dedé, pelo seu carinho e ajuda nas tarefas domésticas.

Ao meu marido, Máximo, por me fazer feliz, pela paciência de me ver acordada quase todas as noites, apoiando-me e acreditando no meu trabalho.

A minha avó Alba Lima, por haver gerado essa família tão maravilhosa e unida. E nela que tenho base e demonstração de vencedores de vida.

A atenção e apoio de todos os meus tios, tias, primos e primas que, citando-os aqui não é suficiente para completar os agradecimentos.

Ao professor doutor José Aires de Castro Filho, que há sete anos acompanha a minha jornada acadêmica dando-me oportunidades de crescimento.

A professora doutora Ana Karina Morais de Lira, pelo acompanhamento acadêmico, amizade e por ter aceitado todos os convites quando solicitada.

A professora doutora Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, por ter aceitado meu convite para a banca.

Ao coordenador do Programa de Educação Brasileira, professor doutor Hermínio Borges Neto pela atenção durante o curso de pós-graduação.

Aos demais professores do Programa,pelo profissionalismo.

Conceituo educação como uma estratégia da sociedade para facilitar que cada indivíduo atinja o seu potencial e para estimular cada indivíduo a colaborar com os outros em ações comuns na busca do bem comum.

Ubiratan D´Ambrosio

RESUMO

Avaliações recentes por meio de testes como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), mostra que os alunos não têm um desempenho em matemática que seria esperado para a série que estão concluindo. Geralmente isso acontece de o ensino ser desprovido de significado e prioriza a manipulação simbólica. Pesquisas em Informática Educativa e Educação Matemática mostram que ambientes computacionais ajudam no desenvolvimento de conceitos matemáticos. Tais ambientes permitem aos alunos realizarem simulações e formular novas formas de representação mental. Alguns desses ambientes mais recentes são chamados de objetos de aprendizagem. O presente estudo tem o objetivo de investigar como esses objetos podem contribuir no desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos de séries iniciais, um aspecto novo, já que geralmente os alunos começam a estudar Álgebra somente no sétimo ano do Ensino Fundamental. A pesquisa foi realizada em uma escola pública de Fortaleza – Ceará – Brasil, com alunos do terceiro e quinto anos do Ensino Fundamental. Os alunos foram investigados mediante uma entrevista clínica, que analisa o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos durante as atividades em materiais elaborados para tais fins. O estudo concluiu que os alunos superam suas dificuldades iniciais sobre as atividades propostas e elaboram estratégias de resolução que facilitam a compreensão de conceitos algébricos exigidos em séries mais avançadas. Os resultados do estudo devem contribuir na elaboração de atividades para auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos das séries iniciais.

Palavras-chaves: educação matemática; objetos de aprendizagem; Álgebra inicial; conceitos algébricos

ABSTRACT

Recent results from standardized tests such as SAEB (National Evaluation System of K-12 Education) shown that students are not developing mathematical concepts accordingly to the grade they are concluding. Generally, the reason is a teaching approach meaningless which emphasize only symbolic manipulation. Results from research in Mathematics Education and Instructional Technology shown that computer environments can help in the development of mathematical concepts. These environments allow for the students to conduct simulations and new ways of mental representation. Some of these current environments are called learning objects. The present study aims to investigate how these objects can contribute in the development of the algebraical thought in the early school years, a recent trend, since usually students are introduced to algebra in the 7th grade. The research was conducted in a public school in the city of Fortaleza, CE, Brazil with 3rd and 5th grade students. Students were interviewed while solving algebraical problems using a variety of manipulative, written problems and learning objects, specifically design for the study. The results shown that students can overcome conceptual obstacles about algebra during the proposed situations. They developed a series of solving problems strategies which can later facilitate the comprehension of more advanced algebraical concepts. The results should contribute to the design of activities for helping the development of algebraical concepts in the early school years.

Key-words: mathematics education; learning objects; early algebra; algebraical concepts.

LISTA DE FIGURAS

Tela do objeto de aprendizagem Balança Interativa..44
Tela do objeto de aprendizagem Balança Seriada...46
Material confeccionado...47
Potes confeccionados...48
Balança de dois pratos...48
Desenho da aluna Tatiana para resolver o primeiro problema..................................58
Desenho da aluna Tatiana..75
Desenho da aluna Amanda...75
Resolução da primeira, terceira e quarta questões...76
Resolução da terceira questão da aluna Carol..77
Resolução da quarta questão da aluna Carol..78
Resolução da quinta questão da aluna Carol..79
Resolução da quinta questão do aluno André...79

LISTA DE TABELAS

Análise do uso da estratégia subtrativa...92
Análise das dificuldades registradas..94

LISTA DE GRÁFICOS

Desempenho dos alunos por questão...69

Estratégias utilizadas pelos alunos por problema...78

Dificuldades categorizadas..84

Estratégias utilizadas para descobrir o valor dos pesos..90

Média do número de movimentos dos alunos do terceiro e quinto ano.......................95

Relação das estratégias utilizadas no terceiro e quinto anos......................................106

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS....9
LISTA DE TABELAS....10
LISTA DE GRÁFICOS....11
INTRODUÇÃO....13
1 EDUCAÇÃO, INFORMÁTICA EDUCATIVA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA....19
1.1 Informática Educativa....19
1.2 Informática Educativa e Educação Matemática....21
2 ÁLGEBRA E SUAS NOÇÕES INICIAIS....26
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE INVESTIGAÇÃO....37
3.1 Os sujeitos....37
3.2 Situações-problemas verbais....38
3.3 Os objetos de aprendizagem....43
3.3.1 Balança Interativa....43
3.3.2 Balança Seriada....45
3.3.3 Balança de dois pratos....46
3.4 Procedimento de coleta de dados....48
4 ANÁLISES E DISCUSSÕES....51
4.1 Categorias de desempenhos, estratégias e dificuldades....51
4.1.1 Situações problemas verbais....52
4.1.2 Balança de dois pratos (medindo pesos)....53
4.1.3 Balança Interativa....53
4.1.4 Balança de dois pratos (comparando pesos)....55
4.1.5 Balança Seriada....55
4.2 Análises das respostas....56
4.2.1 Situações problemas verbais....57
4.2.1.1 Desempenho....57
4.2.1.2 Estratégia de resolução....70
4.2.1.3 Dificuldades....81
4.2.2 Balança de dois pratos (medindo pesos)....86
4.2.2.1 Estratégia de resolução....86
4.2.2.2 Dificuldades....93
4.2.3 Balança Interativa 95
4.2.3.1 Desempenho....95
4.2.3.2 Estratégias de resolução....96
4.2.3.3 Dificuldades....107
4.2.4 Balança de dois pratos (comparando pesos)....112
4.2.4.1 Estratégias de resolução....112
4.2.5 Balança Seriada....115
4.2.5.1 Estratégias de resolução....115
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS....119
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS....124
ANEXOS....129
Pesos conhecidos 130
Pesos desconhecidos....130

INTRODUÇÃO

> Sei que aprendo muito ensinando, mas não sei ainda como aprendo (KENSKI, 2003:12).

Ao fazer uma reflexão sobre como escolhemos o caminho da pesquisa, podemos relembrar, muitas vezes, a maneira prazerosa que esta atividade já nos proporcionou. Investir na carreira de ser educador e na atividade de ensino também nos ajudou em maior desenvolvimento e aprimoramento sobre o conteúdo que vimos pesquisando. Ser professor-pesquisador nos faz refletir a idéia de que o aprendizado pode ser desenvolvido, muitas vezes, nas atividades de ensino do que propriamente nas ações de aprendizagem.

Com essa reflexão, relembram como optam por fazer o curso de Pedagogia e nos recordamos de que gostávamos de ensinar e aprendíamos muito com isso. Na infância, apreciávamos ensinar para os colegas e nos sentíamos bem mais envolvida com algum conteúdo, quando ensinávamos para alguém ou até para nós própria.

Escolher o curso de Pedagogia não foi uma tarefa muito fácil, uma vez que é considerado um curso desvalorizado pela sociedade e pelo mercado de trabalho. Além disso, muitas vezes, demonstrávamos ser uma adolescente tímida e não sabíamos por que iríamos escolher o magistério. Tínhamos vontade de conhecer a Educação, estudar como as crianças aprendem e como poderíamos criar situações de aprendizagem. Queríamos buscar novos caminhos para as dificuldades educacionais, descobrir e reinventar!

Seguimos o caminho, ingressemos na Universidade Federal do Ceará (UFC) e, logo no segundo semestre, passamos na prova para uma bolsa de pesquisa, ensino e extensão. Como bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET), começamos a estudar sobre Informática Educativa.

Na realidade, nosso interesse por esse tema começou bem antes, pois tivemos oportunidade de ter contado com o computador desde cedo, tanto em casa como na escola. Em casa, usávamos o computador para trabalhos escolares e pesquisas em CD-ROM. Na escola, empregávamos a maquina para aprender a utilizá-la como ferramenta; aprendíamos a usar

Word, Excel, Windows e DOS. Sentíamos um grande interesse em conhecer as ferramentas, mas, ao ingressarmos na Pedagogia, sabíamos que o computador poderia oferecer algo mais do que apenas uma oportunidade para usar os programas do *Office*.

Ao cursar Pedagogia e pesquisar sobre o tema, aprendemos e compreendemos que o computador é mais bem explorado, quando o usamos como uma tecnologia para o ensino de algum conteúdo específico do currículo escolar.

Durante a vigência da bolsa, além de realizar pesquisas sobre formação de professores e a escolha de curso dos adolescentes pré-universitários (FREIRE, R. S e BARRETO, J. A. E. 2002), tivemos oportunidade e interesse por ser monitora da disciplina de Informática na Educação. A experiência foi relevante, pois aprendemos na teoria e na prática o que a Informática e seus recursos podem trazer de benefícios a educação, sendo uma ferramenta que ajuda o professor a planejar novas atividades em sala de aula. A atividade de monitoria nos fez perceber melhor que podemos desenvolver projetos juntamente com professores para aprimorar o uso dos computadores nas escolas.

Mesmo tendo um grande interesse na área de Informática Educativa, participamos de pesquisas que não envolviam o uso do computador. Na área de Educação Matemática, participamos em 2002, de um estudo, no qual identificávamos o desempenho dos alunos do I e II Ciclo, durante a resolução de problemas que envolviam conceitos pertinentes às estruturas aditivas e multiplicativas[1]. Durante esse estudo pudemos concluir que os alunos não compreendem o significado das situações-problemas nem sabem resolver os algoritmos corretamente. O resultado indicou que o desempenho deles estava muito abaixo do esperado (FREIRE, R. S., VASCONCELOS, N. P. e CASTRO-FILHO, J. A., 2002).

Ainda na graduação, participamos de grupos de estudos e do projeto “Álgebra Ativa” que tinha como objetivo desenvolver um objeto de aprendizagem como suporte ao ensino de conceitos algébricos. Durante a pesquisa, confeccionamos materiais concretos e exercícios para apoiar a busca, realizamos leituras aprofundadas sobre o tema e debates entre os participantes da investigação. Por meio, dessas atividades, pudemos compreender que um trabalho de

[1] Entende-se por estruturas aditivas problemas que envolvem conceitos como o número e suas propriedades, as operações de soma e subtração e noções sobre transformações e suas representações gráficas. As estruturas multiplicativas são problemas que englobam conceitos relacionais como multiplicação, divisão, fração, razão e proporção (VERGNAUD, 1990).

pesquisa em educação é mais do que a investigação de um determinado tema. Desenvolver uma busca científica envolve um contexto social que nos faz, como pesquisadores, querer sempre investigar novos métodos de ensino.

Durante a participação nesse projeto, sempre nos questionávamos: como fazer para melhorar o rendimento dos alunos em Matemática? Com esse questionamento, interessamo-nos em pesquisar os dois objetos de estudo juntos – Informática Educativa e Educação Matemática – pois, além de acreditarmos que o computador poderia ser uma ferramenta para ajudar tal deficiência no ensino da Matemática, tínhamos muito interesse em aprofundar estudos sobre os dois temas.

Sabíamos que enfrentaríamos dois grandes desafios durante essa jornada: a deficiência no ensino da Matemática e a barreira que muitos professores têm ao utilizar o computador. Assim desafiada, iniciamos nossa participação em pesquisas que envolviam estudos nessas duas áreas. Começamos a pesquisar como um objeto de aprendizagem (OA) intitulado Balança Interativa pode auxiliar no desenvolvimento de conceitos algébricos nos alunos das séries finais do Ensino Fundamental. (SILVEIRA, M. J., FREIRE, R. S. e CASTRO-FILHO, J. A, 2002, FREIRE, R. S., LEITE, M. A., CABRAL, B. S., PASCHOAL, I. V. A. & CASTRO-FILHO, J. A., 2003, FREIRE, R. S., LEITE, M. A. e CASTRO-FILHO, J., 2003).

Esses trabalhos mostraram que os alunos podem desenvolver conceitos algébricos durante a manipulação do OA Além disso, desenvolvem estratégias que auxiliam nessa elaboração do pensamento. Ao final do trabalho, concluímos que os estudantes entendem o sentido relacional da álgebra, compreendem sobre manipulação de equações e inequações e aprimoram conceitos algébricos, como incógnita, variável, maior do quê e menor do quê.

Outra investigação de grande relevância foi desenvolvida com o intuito de entender quais as dificuldades que os alunos possuíam ao resolver problemas algébricos. A maioria dos alunos entendia bem o que os problemas pediam, no entanto, não sabia montar uma equação. Em vez disso, faziam desenhos icônicos para representar a incógnita da equação. Os alunos que montavam a equação erravam durante a manipulação das expressões algébricas e não faziam a relação entre seus membros (FREIRE, R. S., CABRAL, B. S. e CASTRO-FILHO, J. A., 2004). Concluímos que essa dificuldade ocorre pelo fato de o ensino ser desprovido de atividades e baseado em regras de manipulação simbólica.

Durante a pesquisa, outro OA foi desenvolvido com o objetivo de aprofundar os estudos sobre a Álgebra. Baseado na limitação do OA Balança Interativa de trabalhar somente com números positivos, OA Cartas Interativa foi desenvolvido para trabalhar com expressões que contenham números negativos. Durante a pesquisa com esse objeto, na nossa avaliação, os alunos compreendem a relações com números negativos e conseguem operar com eles, quando trabalham com sistemas de equações (CASTRO-FILHO, J. A., LEITE, M. A., FREIRE, R. S. e MACEDO, L. N., 2005).

Ainda durante o trabalho acadêmico, tivemos a oportunidade de desenvolver e participar de projetos de extensão, com o objetivo de capacitar professores do Estado na área de Informática Educativa e ministrar cursos, envolvendo ambientes computacionais de apoio ao ensino da Matemática. Esses cursos eram oferecidos para a comunidade acadêmica da graduação que se interessava por conhecer mais sobre ambientes computacionais e softwares educativos.

Ao final da graduação, trabalhamos como professora de Laboratório de Informática em uma escola particular de Fortaleza, pudemos aprimorar, na prática, o conhecimento e experiências que o trabalho de pesquisa proporcionou.

Estudar sobre a aprendizagem de conceitos algébricos mediados por computador nos proporciona muita satisfação e motivação para continuar o trabalho como pesquisadora. Desde então, esse sempre foi o tema principal no desenvolvimento das pesquisas com as quais nos envolvemos.

Logo quando concluído o curso de graduação em julho de 2004, resolvemos continuar o trabalho e os estudos na área. Em 2005, iniciamos o curso de Mestrado em Educação Brasileira, na linha de pesquisa em Novas Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação. Foi daí que tudo recomeçou e é esse trabalho que apresentamosnessa dissertação.

Na realidade, fizemos questão de apresentar esse trabalho como um rito de passagem, para marcar a conclusão do programa de Mestrado, como é formal e normal de ser feito. No entanto, uma vez que fizemos progressão para o doutorado no programa de Pós-Graduação ao qual nos encontramos vinculados. Poderíamos simplesmente continuar nossos estudos apresentando ao final do nível a tese de doutorado. Além de servir para a obtenção do diploma e título de mestre, o presente trabalho certamente nos ajuda a organizar e sistematizar as idéias até agora padronizadas.

O objetivo geral desse trabalho é investigar o pensamento algébrico de alunos das séries iniciais (3ª. e 5ª. ano) durante a utilização de objetos de aprendizagem e outras atividades (manipulativos e problemas verbais).

O termo objetos de aprendizagem é um conceito novo e atualmente existem várias definições para ele, representando diversas definições sejam elas técnicas se fixando em um detalhamento técnico sobre o armazenamento de informações e na manipulação dos objetos ou educacional focando o comportamento da aprendizagem (TAVARES, 2006).

O desenvolvimento dos objetos de aprendizagem é realizado por um programa do Ministério de Educação (MEC) chamando Rede Internacional Virtual de Educação (RIVED). O RIVED é um programa da Secretaria de Educação a Distância (SEED), que tem objetivo de produzir conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos de aprendizagem para estimular o raciocínio e o pensamento crítico dos estudantes. A meta do programa é disponibilizar esses conteúdos digitais para melhorar a aprendizagem das disciplinas da educação básica e a formação cidadã do aluno.

Para o Ministério da Educação, objetos de aprendizagem são ferramentas educacionais usadas para estimular o raciocínio e o pensamento crítico dos estudantes da educação básica, utilizando o potencial da informática às novas abordagens pedagógicas. Sendo assim, um objeto de aprendizagem é qualquer recurso que possa ser reutilizado para dar suporte ao aprendizado. Para o programa do RIVED/MEC, qualquer material eletrônico que deriva informações para a elaboração de conhecimento é considerado um objeto de aprendizagem, podendo ser uma imagem, página HTM, animação ou simulação (BRASIL, 2007).

Como objetivos específicos preparamos atividades com e sem o uso de computador, que ajudam na formulação do pensamento algébrico; verificamos como objetos de aprendizagem e outras atividades favorecem a elaboração do pensamento algébrico e identificar a maneira como as crianças formulam suas hipóteses sobre as atividades.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo trata de forma geral sobre o tema Educação, Informática Educativa e Educação Matemática, discutindo sobre a inserção dos computadores na educação, seu uso no ensino e aprendizagem, fazendo considerações sobre o ensino da Matemática e como os computadores podem ser uma ferramenta de ensino.

No segundo módulo, apresentamos as diversas pesquisas sobre a Álgebra inicial, situando o atual ensino da Matemática nas escolas e como os alunos elaboram conceitos algébricos.

Relatamos os procedimentos metodológicos de investigação, explicando o tipo de pesquisa, os sujeitos que participaram do estudo e o material utilizado, no terceiro capítulo deste relatório de pesquisa.

A categorização das estratégias, o desempenho e as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a resolução das atividades são exibidos no quarto segmento, para, ao final, no quinto capítulo apresentarmos as considerações finais do estudo, propondo investigações posteriores.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para o universo acadêmico como forma de aprofundamento sobre a iniciação algébrica e para professores, ajudando-lhes em sua prática docente com materiais e recursos pedagógicos.

1 EDUCAÇÃO, INFORMÁTICA EDUCATIVA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

> Se é verdade que os planos podem ser mudados, por outro lado, é necessário destacar a importância de explicitarmos desde o ponto de partida, onde queremos chegar (MATOS E VIEIRA, 2001: 70).

Nesse capítulo, abordaremos duas temáticas relevantes naeducação. As contribuições da Informática Educativa para a educação e especificamente como ela possibilita o trabalho para Educação Matemática. Procuraremos ao longo do estudo unir os dois temas para que possamos perceber sua interseção.

1.1 Informática Educativa

Nos últimos anos, um dos temas mais polêmicos discutidos na educação, tanto em âmbito nacional como internacional, foi o uso do computador na escola. Encontramos duas posições bem distintas: de um lado, aqueles que desacreditam dessa nova tecnologia, pois têm receio quanto à utilização do computador na sala de aula, enquanto os mais pessimistas acreditavam que poderiam ser substituídos pela máquina. Por outro lado, há os defensores do emprego de tal ferramenta na escola, pois este seria mais um recurso na sala de aula.

No Brasil, a interseção Educação e Informática teve início por volta de 1970, quando setores da economia sentiram necessidade de capacitar recursos humanos em razão do crescimento econômico e da industrialização por que passava o Brasil.

Segundo Valente (1998), no Brasil, a inserção dos computadores nas escolas ocorreu na década de 1980, quando estudiosos pesquisavam as vantagens e desvantagens dessa nova ferramenta na escola. Desde essa época, vários eventos aconteceram com o objetivo de desenvolver e divulgar as primeiras experiências na área de Informática Educativa. Conforme Ramos (2003), o Ministério da Educação brasileiro promoveu diversos seminários, que definiram e organizaram as políticas na área de Informática Educativa. Outros eventos foram promovidos em iniciativas que envolviam empresas públicas e privadas. Além disso, nos anos 1980, pudemos observar aumento significativo de publicações de livros, revistas e artigos nessa área.

Na perspectiva Borba e Penteado (2003), a entrada dos computadores na educação causava repulsa por parte de alguns professores, os quais questionavam como seria uma aula através do computador. Muitos deles acreditavam que o aluno apertaria as teclas e o computador obedeceria aos comandos. Argumentavam que essas atividades só viriam aumentar as crises educacionais e não estimulariam o raciocínio crítico dos alunos.

Valente (1998) exprime a idéia de que a inserção dos computadores nas escolas, muitas vezes, acontece de forma errada, pois muitas delas utilizavam o computador porque outras instituições já empregavam essa nova tecnologia. Esse tipo de implementação não exige senso crítico, e as idéias parecem ser meramente copiadas. A sociedade pressionava de certa forma a escola para a inserção de computadores, a fim de que os alunos aprendessem a lidar com a máquina. Esse pensamento vai ao encontro de uma proposta do ensino, segunda a qual o computador é um meio didático, uma ferramenta, para aprendizagem e não apenas para o ensino.

Por outro lado, muitos apoiaram o uso da tecnologia como um instrumento poderoso para a inovação. Nos dias atuais, podemos perceber que essa inserção do computador na escola não substituirá o professor. Ao contrário, o computador é somente mais uma ferramenta de auxílio ao ensino e à aprendizagem. É o professor que vai ser o mediador e providenciar atividades que possam ser motivadoras e significativas aos alunos. Trabalhar com Informática Educativa não significa apenas inserir o computador na escola e deixar que os alunos usem um determinado programa ou *software*. Talvez seja esse o pensamento daqueles que não acreditam nos benefícios que o computador pode trazer ao âmbito escolar. Para adotar um programa de Informática Educativa, é preciso haver um profissional qualificado que conheça tecnologia e educação, além de um plano pedagógico que seja contextualizado com as demais disciplinas. Sem isso, a utilização do computador na escola será desvalorizada e este se tornará um objeto sem uso (CYSNEIROS, 2002).

O computador não veio para resolver nenhum problema educacional como repetência, evasão ou outro. Na educação, permite a interação com diferentes formas de representação simbólica, como, por exemplo, gráficos, textos, movimentos, imagens, como também o uso de várias mídias (BRASIL,1998a).

Sabendo da importância do professor na aprendizagem e tendo consciência de que o computador não fará nada sozinho, o governo cria projetos voltados capacitação do professor, a fim de que esse profissional possa ter o domínio dessa tecnologia. Para isso, o MEC adotou várias políticas, as quais possibilitam a preparação dos professores na utilização da Informática Educativa e ainda atuam como multiplicadores na formação de outros professores (ALMEIDA, 2000).

Mesmo depois de muitas discussões, nos dias atuais, esse tema continua sendo muito debatido e pesquisado. O computador é, sem dúvida, um marco na evolução tecnológica, e cada área da sociedade quer adaptar as suas necessidades e atividades ao uso do computador (OLIVEIRA, 1997). No caso deste ensaio, interessa analisar de que forma o computador pode auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos, em particular, de conceitos algébricos. É isso que aborda o próximo tópico.

1.2 Informática Educativa e Educação Matemática

O objetivo da Informática na escola é estimular o aluno a buscar, pesquisar e ser dono de seu aprendizado. Como, porém, o computador pode ser uma ferramenta ao ensino e à aprendizagem? Qual o impacto que ele causa na aprendizagem do aluno? Como ele ajuda na formação do pensamento? Esses são os principais questionamentos ao se estudar a utilização do computador na educação.

O uso de *software*, e outros materiais pedagógicos, como, por exemplo, jogos educacionais e de material dourado[2], é utilizado para evitar o ensino baseado em regras e fórmulas. Encontramos, porém, um empecilho, pois a solução de problemas utilizando esses materiais, muitas vezes, é descontextualizada do próprio conteúdo, ou seja, freqüentemente, o aluno não encontra uma ligação do conteúdo com o material que está sendo utilizado (VALENTE, 1998).

Apesar disso, não podemos dispensar o emprego desses materiais e das mídias, pois podem trazer para a sala de aula uma nova dinâmica e reorganização de formas de pensamento. Segundo Borba (1999), o uso de *software* pode trazer para a sala de aula discussões sobre o

[2]Materiais concretos utilizados nas escolas que permitem a manipulação e visualização de situações matemáticas.

papel do aluno e do professor. Por exemplo, a utilização dessa mídia proporciona maior número de experimentos do que se empregarmos apenas a tecnologia lápis e papel. O mesmo autor cita em seus estudos o fato de que atividades no computador facilitam a modelagem de alguns conteúdos, como o ensino de funções.

Um estudo conduzido por Bittar e Chaachoua (2004) mostra que as competências dos alunos (manipulação simbólica) em Álgebra melhoram quando usam um *software* chamado APLUSIX, que desenvolve noções de manipulação de expressões algébricas. Segundo as autoras, a facilidade de manipulação das expressões algébricas e a verificação dos cálculos do aluno oferecida pelo *software* são as principais razões dessa melhoria no desempenho. Com o uso de APLUSIX, os alunos têm a oportunidade de rever seus testes na atividade de autocorreção, podendo observar os cálculos corretos e os errados. Apesar dessa vantagem, seria interessante se o software enfatizasse algumas questões do cotidiano para que a manipulação simbólica se tornasse mais significativa.

Diversas pesquisas relacionadas a Informática Educativa e Educação Matemática desenvolvem e investigam ambientes computacionais para facilitar que os alunos ampliem conceitos relacionados a um determinado conteúdo de matemática (FREIRE e CASTRO-FILHO, 2006, FREIRE e CASTRO-FILHO, 2003, CASTRO FILHO, LEITE, FREIRE e PASCHOAL, 2003). Alguns estudos realizados com o *software* "Dividir para conquistar" (CARRAHER, 1989, 1992) demonstram que os alunos podem raciocinar sobre diversas idéias abstratas da Matemática, baseados em uma atividade que transmita significado e motive os alunos. Segundo Carraher (1992), o papel do computador consiste em oferecer atividades em que os estudantes se achem motivados e que dêem significado ao conteúdo proposto. O uso de *softwares* educativos, entretanto, não chega à sala de aula em razão da falta de computadores nas escolas e de professores capacitados para tal fim.

Outra pesquisa observou alunos da antiga 7ª. série, ao manipular um objeto de aprendizagem denominado Balança Interativa, que tem como objetivo desenvolver conceitos relacionados à Álgebra (igualdade, desigualdade, maior, menor) e auxiliar os alunos na passagem das operações aritméticas ao pensamento algébrico (CASTRO FILHO, LEITE, FREIRE e PASCHOAL, 2003). Essa pesquisa mostrou que os alunos, ao utilizar o objeto, estão desenvolvendo um raciocínio que será importante durante a manipulação simbólica exigida mais à frente. Ao interagir com o objeto de aprendizagem, os alunos criaram estratégias de resolução que levam à compreensão de igualdade, desigualdade e, além disso, compreenderam o sentido da manipulação de símbolos em uma equação.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, o uso de computadores na educação:

> (...) possibilita a criação de ambientes de aprendizagem em que os alunos possam pesquisar, fazer antecipações e simulações, confirmar idéias prévias, experimentar, criar soluções e construir novas formas de representação mental. Além disso, permite a interação com outros indivíduos e comunidades, utilizando os sistemas interativos de comunicação: a rede de computadores. (BRASIL, 1998a:141).

A utilização do computador na sala de aula pode desenvolver o raciocínio e possibilitar a resolução de problemas, podendo auxiliar em atividades ligadas ao ensino da Matemática, uma vez que um dos objetivos dessa disciplina é despertar o raciocínio lógico-dedutivo (BRASIL, 1998a).

Aprender e estudar Matemática consiste em muito mais do que contar e aprender a lidar com os números. A Matemática é uma disciplina que permite resolver problemas do cotidiano, despertar o raciocínio lógico e é um instrumento essencial para a elaboração do conhecimento em outras áreas disciplinares (BRASIL, 1998b).

Na perspectiva de Vasconcelos (1998), o ensino da Matemática é centrado em procedimentos mecânicos, regras, memorização e carentes de significado. Esses são motivos que levam os alunos a não ter interessarem pela Matemática. É de fundamental importância que o ensino da Matemática tenha como objetivo estimular o raciocínio, a curiosidade e o interesse de resolver problemas. Para a autora, os alunos se mostram desmotivados a aprendê-la, pois, muitas vezes, não vêem ligação entre a Matemática e o seu cotidiano.

Muitos estudos investigam o baixo desempenho dos alunos em Matemática, explicando que esta é uma matéria causadora de tanta repulsa por parte deles (SPAECE, 1998, SCHAPPO e PONTE-FILHO, 2003, VASCONCELOS, FREIRE e CASTRO-FILHO, 2003). O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), um instrumento de avaliação que tem como objetivo advertir as políticas educacionais a melhorar a qualidade da educação brasileira, pesquisa em âmbito nacional o desempenho dos alunos nas disciplinas escolares. Os resultados da última avaliação indicam expressivamente como se encontra o ensino nesta área. Os alunos da antiga quarta série (dez anos) apresentam em Matemática um resultado muito elementar para quem está concluindo a primeira etapa do Ensino Fundamental. Eles não utilizam corretamente as operações, pois resolvem problemas usando apenas a adição e a subtração e só fazem multiplicação quando esta envolve apenas um algarismo (BRASIL, 2004).

Todas essas dificuldades não aparecem somente nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Se analisarmos dados do SAEB em séries mais avançadas, poderemos notar que a dificuldade com a Matemática continua à medida que os alunos vão avançando no grau de escolaridade. Comparando as duas últimas avaliações feitas pelo SAEB, percebemos que não houve mudanças significativas no desempenho dos alunos da 8ª série, tanto na disciplina Português como em Matemática. Analisando o desempenho de Matemática, observa-se que esses alunos apresentaram um resultado muito crítico ao resolver expressões algébricas que envolvem apenas uma incógnita (BRASIL, 2004). Esses dados mostram que os alunos não estão desenvolvendo os requisitos mínimos para uma trajetória bem-sucedida nos graus escolares posteriores e não ampliam conceitos algébricos, de extrema importância para compreensão de conteúdos fundamentais referentes à Geometria.

Os resultados obtidos pelos alunos podem ser explicados pela falta de uma formação docente qualificada, pelas precárias condições de trabalho nas escolas e pela ausência de políticas educacionais que supram essa necessidade de uma ampla capacitação docente (BRASIL, 2004).

Alguns professores e pesquisadores, diante das dificuldades dos alunos em Álgebra, acreditavam que a solução era adiar o seu ensino, pois defendiam a idéia de que alunos de 6ª. e 7ª. séries não tinham um nível de desenvolvimento intelectual adequado para desenvolver conceitos algébricos. Teorias mais recentes acreditam que conceitos algébricos devem ser introduzidos e estimulados já nas séries iniciais do Ensino Fundamental juntamente com o ensino da Aritmética (LINS & GIMENEZ, 1997).

Para esses autores, a concepção de trabalhar conceitos algébricos nas séries iniciais não é aumentar a quantidade de conteúdos ou de antecipar o seu ensino, mas sim utilizar dispositivos como diagramas e algumas atividades que dêem base para o pensamento algébrico no futuro. Para ele, ao antecipar atividades que envolvam noções algébricas, os alunos não se assustarão quando começarem a estudar Álgebra nas séries seguintes.

Desse modo, ao trabalhar com os conceitos que envolvem o raciocínio algébrico, os alunos estarão mais aptos a compreender conceitos algébricos de modo mais intuitivo e simbólico.

Todas essas reflexões nos fazem pensar sobre as seguintes questões: que tipos de atividades podem ajudar na aquisição de conceitos algébricos? Como estimular os alunos que se encontram nas séries iniciais a trabalhar com símbolos e representações? Quais são os conceitos algébricos desenvolvidos nessa faixa etária, mesmo que seja de forma elementar? Será que os alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental podem desenvolver tal pensamento?

2 ÁLGEBRA E SUAS NOÇÕES INICIAIS

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Álgebra é um conteúdo que desenvolve a capacidade de abstração e generalização e é uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Daí ser mais importante realizar um trabalho e propor situações em que o aluno seja capaz de

> construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da álgebra apenas enfatizando as 'manipulações' com expressões e equações de uma forma meramente mecânica (BRASIL:1998b:116).

"Não é fácil definir álgebra": essa foi uma das frases citadas por Usiskin (1995: 9) ao começar a definir o pensamento algébrico. A explicação para tal afirmação é porque a álgebra tem diversas conotações em seu ensino. Por exemplo, a álgebra ensinada na escola média é muito diferente daquela ensinada em cursos superiores, uma vez que "a álgebra na escola média tem a ver com a compreensão do significado das 'letras' e das operações com elas, e consideramos que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez". (IDEM, 09).

O estudo da Álgebra não está apenas relacionado com a manipulação de símbolos. O conhecimento algébrico é fundamental na resolução de problemas matemáticos, promove condições favoráveis para resolução de problemas, em que o emprego somente de estratégias pertencentes ao campo da Aritmética se mostra insuficiente (DA ROCHA FALCÃO, 1993).

Há um consenso na comunidade Educação Matemática de que algumas atividades ligadas ao campo conceitual algébrico poderiam ser introduzidas já nas séries iniciais, para que os alunos não sintam tantas dificuldades ao estudar Álgebra pela primeira vez. Autores como Carraher, Carraher, & Schliemann (2002), Pinto (2001), Lins & Gimenez (1997), Lessa (1996), Kaput (1994), Da Rocha Falcão (1993) e Spinillo (1993) pesquisam o modo como algumas atividades podem ajudar no desenvolvimento do pensamento algébrico nas séries iniciais.[3]

No currículo brasileiro, a Álgebra é introduzida somente a partir da sexta série, depois que os alunos já tiverem aprendido conteúdos relacionados à Aritmética. Esta, por sua vez, dá

[3] Nas pesquisas americanas, autores conceituam os estudos da Álgebra em séries iniciais como *early algebra*. Neste trabalho, propomos conceituar os estudos da álgebra nas séries iniciais como álgebra inicia.l

suporte para que os alunos possam compreender melhor os conteúdos algébricos. Essa idéia de currículo tem relações com a teoria cognitivista de Jean Piaget, a qual defende a idéia de que os processos de aprendizagem possuem ligações diretas com os estádios de desenvolvimento, ou seja, a cada estádio do desenvolvimento, as pessoas possuem esquemas que garantem condições para que possam aprender algum tipo de conteúdo (COLL, MARCHESI, PALACIOS e colaboradores, 2004).

Nessa perspectiva, é necessário que os alunos aprendam primeiro conteúdos relacionados à Aritmética, geralmente vistos como fáceis, pois trabalham com números, quatro operações e tabuada. Depois de aprender esses conteúdos, eles estarão prontos cognitivamente a aprender conteúdos relacionados à Álgebra, um conteúdo que possui procedimentos de formalização, generalizações e emprega lógica de representação.

Diversas pesquisas mostram que essa divisão curricular entre a Aritmética e a Álgebra causa dificuldades de compreensão e uso aos alunos quando são iniciados no conteúdo algébrico (LINS e GIMENEZ, 1997, DA ROCHA FALCÃO, 1993, PINTO, 2001, KAPUT, 1994). Esses autores defendem a tese de que iniciar mais cedo o trabalho com Álgebra é a boa alternativa para que os alunos não tenham tantas dificuldades ao começarem o estudo do conteúdo algébrico no futuro. Esse trabalho seria realizado de modo que a Aritmética e a Álgebra se desenvolvessem juntas, uma dando significado a outra.

> O que precisamos fazer é entender de que modo álgebra e aritmética se ligam, o que elas têm em comum. Feito isso, teremos encontrado uma verdadeira raiz, o que nos permitirá repensar a educação aritmética e algébrica de forma única. (LINS e GIMENEZ, 1997:113).

Schiliemann, Carraher, Pendexter e Brizuela (1998) discutem a idéia de que algumas noções algébricas já poderiam ser introduzidos aos alunos por meio de atividades e situações-problemas para que, ao estudar Álgebra nas séries posteriores, estejam mais preparados para entender os conceitos algébricos em um nível de representação mais simbólica e abstrata.

Lins e Gimenez (1997) defendem a noção de que as dificuldades dos alunos em Álgebra são provocadas pela ruptura no currículo, uma vez que a álgebra começa a ser introduzida apenas na 6ª. Série do Ensino Fundamental, sem que antes os alunos tenham alguma iniciação ao assunto. Além disso, a Álgebra é ensinada nas escolas com emprego da manipulação simbólica. Quem ainda não escutou, ao estudar Álgebra, as seguintes frases: 'tem que passar o x pro outro lado' ou 'é só cortar os membros iguais da equação'. Com isso, muitas vezes, os alunos não conseguem resolver problemas modelados por equações, não entendem a relação entre as atividades algébricas que resolvem na escola e muito menos sabem aplicar o que aprendem com a vida prática.

O ensino desvinculado de significações e a quebra de conteúdos aritméticos e algébricos provocam algumas dificuldades conceituais, principalmente quando os alunos começam a estudar Álgebra pela primeira vez. Cortes, Kavafian e Vergnaud (1990) apontam que uma das dificuldades surge no conceito de equação. Enquanto a Aritmética, a equação é uma abreviação dos processos de cálculo para aliviar a carga de memória, na Álgebra, uma equação é utilizada para relacionar valores conhecidos e desconhecidos. Esse sentido relacional não é bem compreendido pelos alunos pela falta de referenciais que dêem significado aos símbolos matemáticos no campo da Álgebra.

Outros estudos (LESSA, 1996, DA ROCHA FALCÃO, 1993) indicam que as dificuldades da álgebra ocorrem em razão da quebra entre o pensamento aritmético e o algébrico. Enquanto os alunos nos primeiros anos do Ensino Fundamental aprendem a Aritmética, enfatizando a obtenção de respostas mediante cálculos, aqueles que ingressam na 7ª. série estudam Álgebra, priorizando a representação do problema por meio de representações e realização dos cálculos sobre as equações.

Com relação a esse aspecto, Gimenez e Lins (1997) discutem duas abordagens nas quais o ensino da Álgebra está baseado. A primeira resume o ensino da Álgebra em aplicações de cálculos com letras ou simplesmente "letrista". Observa-se muito essa tendência em livros didáticos, pois muitos deles seguem uma linha da Didática que enfatiza o cálculo com letras, ou seja, ensinam como aplicar o algoritmo (técnica) para que depois os alunos possam aplicar em exercícios (prática). Ao deparar essa metodologia, os alunos da 7ª. série começam a estudar Álgebra e sentem dificuldades em compreender a linguagem matemática, pois, além de envolver simbologia e lógica de representação, nunca foram estimulados a pensar simbolicamente.

Aprender a usar uma técnica para depois aplicá-la torna o ensino da Matemática muito mecânico, pois essa abordagem não se baseia em investigação ou reflexão da atividade que está sendo proposta.

Gimenez e Lins (1997) chamam de “facilitadora” a abordagem baseada no trabalho com situações concretas, para demonstrar ou facilitar o ensino de algumas atividades algébricas, como, por exemplo, o uso de áreas para ensinar produtos notáveis e o uso de balança para ensinar resolução de equações. Gimenez e Lins (1997) apontam que, muitas vezes, os alunos não percebem a relação entre o material empregado nessas atividades com o cálculo formal. Além disso, em muitas dessas atividades, eles não têm a oportunidade de aplicar o que aprendem. Para que essa abordagem se torne eficaz, é importante que as atividades os estimulem não somente a ver a relação entre o concreto e o abstrato, mas também possibilitar que eles se tornem capazes de aplicar o que aprendem.

Para entender melhor o problema que envolve o ensino da Álgebra, Castro (2003) também analisa duas opções pedagógicas, muito utilizadas nas salas de aula. A primeira opção enfatiza as noções da Álgebra, dando base a esta como se fosse a Aritmética generalizada, ou seja, a Álgebra seria uma generalização dos procedimentos aritméticos, tendo como componente de ensino a estrutura dos conjuntos numéricos, as operações e suas propriedades. Essa proposta de ensino da Álgebra está baseada na utilização de letras no lugar de números. O significado da Álgebra é usar uma linguagem mais sofisticada do que a Aritmética, porém com os mesmos problemas e procedimentos. A segunda opção pedagógica conceitua a Álgebra por um tipo específico de pensamento, que diferencia dos outros ramos da Matemática, chamado de pensamento algébrico, pois o aluno está manipulando equações, expressões algébricas etc. Para Castro, essa opção pedagógica é a que tem se dirigido em sala de aula.

Com relação à primeira opção pedagógica, consideramos que tanto o ensino algébrico como o aritmético deve ser uma produção de significados a situações-problemas. A Álgebra não deveria ser uma conseqüência do aprendizado da Aritmética, pois ela pode ser relacionada com o ensino da Aritmética não somente como Aritmética generalizada, mas também como uma atividade que pode dar significados a diversas situações.

É preciso que a atividade algébrica ultrapasse a manipulação simbólica e seja compreendida como ferramenta de resolução de problemas. Na compreensão de Pinto (2001), muitos trabalhos voltados ao campo da Álgebra descrevem o conteúdo algébrico como atividade voltada somente para o cálculo mediante a utilização de letras. Como vimos, essa tendência é uma das causas para a dificuldade do ensino da álgebra. Vergnaud (1997) assinala que conceitos relacionados à Álgebra não são independentes, pois eles estão atrelados às estruturas aditivas e multiplicativas, estruturas estas desenvolvidas no ensino aritmético.

Sabemos que é difícil abandonar essa idéia da caracterização algébrica como sendo o cálculo com letras, pois essa linha de pensamento é algo histórico que começou com os babilônicos e os egípcios e que veio se desenvolvendo até os dias atuais (LINS e GIMENEZ, 1997). Além disso, a Matemática ensinada na escola possui significados diferentes daqueles que fazem parte do cotidiano escolar do aluno. Por exemplo, enquanto na escola este é surpreendido para resolver a equação $3 + x = 8$, no dia- a- dia, ele pode deparar a seguinte situação: Meu irmão tem 8 (oito) figurinhas. Se tinha 3 (três) figurinhas, ganhei mais algumas e fiquei com a mesma quantidade do meu irmão, quantas figurinhas eu ganhei? As duas situações trabalham o mesmo raciocínio, porém estão sendo propostas em contextos diferentes.

Em outro estudo, Schliemann e Carraher (1988) constataram que o desempenho cognitivo das pessoas pode mudar de acordo com o contexto da atividade. Durante seus estudos, os pesquisadores constataram que crianças vendedoras sabiam fazer uma subtração para dar o troco da venda, utilizando procedimentos de cálculo mental. Não conseguiam, no entanto, realizar a mesma operação de subtração se fossem solicitados a resolver pelo algoritmo (cálculo escrito).

Em outro estudo, Schliemann e Carraher (2002) entrevistaram pescadores e cozinheiros durante atividades que faziam parte do seu contexto social e atividades típicas da escola (aplicação de regras e resolução do cálculo escrito). O resultado da pesquisa mostrou que, apesar de esses problemas trabalharem a mesma estrutura matemática, muitos sujeitos não conseguiram resolver as atividades escritas, por não conhecerem a aplicação de regras ensinadas na escola.

Carraher, Carraher e Schliemann (1993) também constataram que as abordagens de ensino na escola estão longe das atividades diárias dos alunos, dificultando, assim, sua aprendizagem. As crianças inseridas no âmbito de venda nas ruas podem aprender as propriedades ensinadas na escola, entretanto, essas propriedades são compostas por sistemas diferentes de representação e possuem um contexto motivacional diferente (representação do sistema monetário em situações diárias *versus* algoritmos escritos em sala de aula).

É necessário que a escola forneça atividades que estabeleçam algum significado com a vida diária dos alunos, para que eles possam estabelecer ligações efetivas com a Matemática mais abstrata que a escola ensina. Antes mesmo de entrar para a escola, as crianças desenvolvem determinadas noções de probabilidade, entretanto precisam aprender na escola de maneira sistemática como resolver problemas fora de seu contexto social (SCHLIEMANN e CARRAHER, 2002).

Sendo assim, é preciso que a escola tenha o objetivo de "cumprir um papel de organizar o mundo fora da escola também –, e tornar-se mais efetiva em seu papel de ajudar os alunos a aumentar seu repertório de modos de produzir significado." (LINS e GIMENEZ, 1997:162).

Eles comentam que a Álgebra e a Aritmética podem lidar com as mesmas situações-problemas, porém utilizam procedimentos e instrumentos conceituais diferentes, causando, assim, algumas dificuldades no entendimento dos significados. Lessa (1996) mostra que, enquanto a Aritmética enfatiza a obtenção de respostas mediante cálculos, a Álgebra prioriza a representação do problema por intermédio de equações e só posteriormente a realização dos cálculos sobre as equações.

O pensamento algébrico se distingue do conhecimento aritmético por possibilitar a representação prévia de situações, como, por exemplo, o estabelecimento de relação entre valor e quantidade de determinado produto. Existem ainda outras diferenças entre o pensamento algébrico e a reflexão aritmética que podem causar dificuldades conceituais quando os alunos estudam Álgebra pela primeira vez. Na Álgebra, uma equação é compreendida como relação entre os valores conhecidos e desconhecidos do problema. Já na Aritmética, uma equação é utilizada para encontrar uma resposta para os processos de cálculos de um problema. Sendo assim, o sinal de igual "=" em uma equação muda de sentido, pois, na Aritmética, esse símbolo estabelece o resultado de uma operação e, na Álgebra, prescreve uma relação de equivalência ou igualdade entre os dois membros de uma equação (LESSA, 1996). Muitas vezes, essas diferenças conceituais no campo da Álgebra e da Aritmética não são bem compreendidas pelos alunos, em razão da falta de significado atribuído aos símbolos.

Além disso, os conteúdos da Álgebra se diferenciam dos aritméticos, pois, enquanto o foco da Aritmética é encontrar respostas numéricas, o da atividade algébrica é estabelecer procedimentos e relações entre diversos contextos de forma simplificada, mediante “regras de procedimento” para uma determinada resolução de problema. Os alunos que começam a estudar Álgebra têm dificuldade de estabelecer essas relações e continuam achando que devem dar, necessariamente, uma resposta numérica em atividades algébricas.

Booth (1995) investigou os erros conceituais cometidos por alunos de 13 a 16 anos que já tinham alguma experiência em Álgebra. Nesse estudo, constatou que os erros em problemas algébricos são semelhantes em quase todas as idades e verificou que essas crianças não sabem criar expressões formando respostas com símbolos matemáticos, pois não encontram um significado em respostas com letras. Por exemplo, em um problema como “some 2 a m” os alunos não consideram 2 + m uma resposta válida, mostrando dificuldades em aceitar procedimentos algébricos. A expressão “m + 2” é dificilmente aceita como uma resposta para aqueles que estão aprendendo Álgebra. Isso acontece porque essa expressão pode representar um procedimento de que se deve somar 2 à incógnita *m* ou a relação pela qual se obteve a resposta tanto quanto a própria resposta.

Essa diferença entre a aplicação de conceitos aritméticos e algébricos dificulta a aprendizagem da Álgebra, pois, muitas vezes, os alunos utilizam conhecimentos aritméticos para dar significado a conceitos algébricos. Na situação anterior, é comum os alunos interpretarem 2 + m como 2m.

Schliemann, Goodrow, & Lara-Roth (2001) propõem atividades que desenvolvem algumas noções algébricas em alunos de segunda série. Os autores mostram como os alunos podem utilizar gráficos para resolver situações propostas pelo investigador, estabelecendo significados a elas. Uma dessas atividades consistiu em explorar problemas que envolvem estruturas aditivas. Depois que os estudantes estavam mais engajados com as situações-problemas, os investigadores levaram os estudantes a um ginásio e pediram que as crianças desenhassem duas linhas paralelas no chão com números que variassem de 0 a 12 e que as duas tivessem a mesma distância entre as escalas. Depois dessa construção, discutiram com os alunos o seguinte problema: "Karen tem duas vezes o tanto de dólares que Franklin". Durante a atividade, os pesquisadores e alunos decidiram que uma linha representaria o dinheiro de Karen e a outra linha o dinheiro de Franklin. As crianças foram chamadas para representar nas retas a quantidade de Karen e de Franklin. Assim, a criança na linha de Karen estaria sempre em um número que fosse duas vezes o valor da posição ocupada pela outra criança na linha de Franklin. Mais tarde, as duas linhas foram posicionadas perpendicularmente, encontrando-se como na origem de x e y em um gráfico. Novamente as crianças representaram a quantidade entre o dinheiro de Karen e de Franklin nas linhas perpendiculares. As posições no gráfico foram nomeadas pelas crianças da seguinte maneira: (0.0), (1.2), (2.4), (3.6). As crianças permaneciam no gráfico mesmo com outras situações sendo propostas. Ao final das situações, as crianças tiveram acesso a uma corda para que ligassem todas as crianças do gráfico, formando, assim, uma reta. No inicio da atividade, algumas delas erravam as posições, mas eram ajudadas por outras da classe. Depois dessa atividade, facilmente resolviam problemas e representaram gráficos na sala de aula. Os pesquisadores perceberam em uma entrevista que as crianças se tornam mais familiares com as convenções dos gráficos e percebem que os pontos posicionados em uma mesma reta de um gráfico representam relações iguais.

Situações propostas e elaboradas pelos próprios alunos, e que fazem parte da vida diária dos estudantes, possibilitam que eles estabeleçam um sentido diferente daquele constituído em uma aula tradicional de Matemática, cujo objetivo é somente transmitir os conteúdos e aplicar as regras dos livros didáticos.

Schliemann, Carraher, Brizuela e Jones (1998) invesigaram atividades que dão suporte para o pensamento algébrico e estudam como as crianças usam esse pensamento para resolver problemas. Durante uma pesquisa, cada aluno foi entrevistado individualmente e instigado a resolver problemas verbais. Para cada problema, o entrevistador narrou ou pediu que o aluno lesse uma história curta, na qual duas pessoas possuíam, inicialmente, a mesma quantidade de objetos e, durante a história, as quantidades eram adicionadas a outras, podendo no final do problema a relação entre as quantidades continuar igual ou ficar diferente. Durante a atividade, os alunos podiam resolver o problema por meio da notação escrita ou usar outras estratégias de resolução. Veremos a seguir um exemplo de problema usado pelos pesquisadores que possui quantidades iguais nos dois lados do membro da equação:

> Brian e Tim adoram comer chocolate. Um dia, Brian levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tim levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tim comeu 2 de seus chocolates e Brian comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa que após o recreio Tim tem a mesma quantidade de chocolates que Brian? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro? (IDEM: 18)

Para resolver esse problema, os alunos devem inicialmente utilizar a notação escrita 10+2=5+5+2, depois a notação 10 + 2 (-2) = 5 + 5 + 2 (-2) e perceber que, no final da situação, Brian e Tim possuem a mesma quantidade de chocolates. É importante esclarecer que, nesse estudo, nem todos os alunos utilizaram a notação reproduzida a pouco, no entanto empregaram outras formas de representação, podendo ser escritas ou mentais. Muitas vezes, desenhavam a quantidade de chocolates no papel e iam fazendo as transformações, para que, no final da situação, comparassem a quantidade de chocolates que Tim e Brian possuíam. Mesmo que o aluno não resolva os problemas pela forma convencional, e sim utilizando desenhos, consideramos essas formas de resolução muito importantes, pois percebe-se que o aluno entende a situação e a resolve corretamente.

Depois de resolver alguns problemas que envolviam quantidades como a situação mostrada há instantes, os alunos foram instigados a resolver situações-problemas que não demonstravam quantidades. Vejamos o exemplo:

> Bob e Andrew foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Bob pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. Andrew encontrou o mesmo número de conchas que Bob, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Bob encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de Andrew. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Bob tem o mesmo número de conchas que Andrew? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro? (idem: 19)

Diferentemente do problema anterior, os alunos não encontram implícitas na situação-problema as quantidades, porém precisam entender as relações, sem necessariamente ter números para estabelecê-las.

Essas pesquisas nos mostram que os alunos mais novos podem criar suas representações e notações diferentes daquelas impostas pela escola. Quando os alunos tentavam resolver esses problemas sem números, muitas vezes, faziam o cálculo mental e explicavam que era difícil resolver no papel, porque não havia número. Sendo assim, faz-se necessário que pesquisadores e professores explorem cada vez mais atividades relacionadas com a organização social e material de práticas culturais e que prestem mais atenção às representações criadas pelas crianças.

> Isso implica que a análise da aprendizagem da matemática deve levar em conta não apenas as estratégias que os indivíduos elaboram durante a resolução de problemas, mas a própria atividade em que se engajam e colaborativamente constroem. (MEIRA, 1996:171).

Em outro estudo sobre a introdução de noções algébricas, Pinto (2001) investigou de que modo crianças da segunda série do Ensino Fundamental resolvem atividades que envolvem tais noções. Essas atividades foram baseadas na seqüência didática elaborada por Araújo, Brito Lima, Da Rocha Falcão, Lessa, Oliveira, Leitão, (2000), com o propósito de formular significados em Álgebra nas séries iniciais (transformações, representação icônica e simbólica, equivalência, incógnita, relação entre quantidades etc). Durante a aplicação dessa seqüência didática, Pinto (2001) observou que, no começo das atividades, as crianças sentiram certa dificuldade para fazer as transformações e estabelecer diferenças entre elas, mas a intervenção da pesquisadora e a interação das duplas pesquisadas ajudaram os alunos a superar as dificuldades encontradas durante a resolução da seqüência.

Outros estudos analisam o emprego de uma balança de dois pratos, tanto em situações cotidianas (CARRAHER e SCHILIEMANN, 1988) como em ambiente escolar (LESSA, 1996; LEITE et al., 2003). Esses estudos ressaltaram a importância de que a balança de dois pratos auxilia na elaboração de significados em equações e entendimento em manipulações simbólicas. Além disso, os estudantes, ao manipular os pesos na balança de dois pratos, resolvem situações-problemas, buscando estratégias e não apenas de forma mecânica.

Diante dessas pesquisas, percebemos a importância de criar diversas situações para que os alunos se envolvam em atividades que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico nas séries iniciais. Apesar de encontrarmos diversas investigações nessa área, não temos ainda, na literatura, atividades que trabalham o pensamento algébrico utilizando ambientes computacionais.

Por intermédio das pesquisas mostradas neste tópico, sentimos a necessidade de aprofundar os estudos e, principalmente, ampliar atividades que favoreçam e dêem maior significado às atividades que levam os alunos a estabelecer relações algébricas. Na maioria dos estudos e pesquisas feitas nessa área, não são apresentadas atividades em ambientes computacionais. Pretendemos criar atividades manipulativas que estimulem os alunos a trabalhar com noções algébricas, como igualdade, desigualdade, incógnita, representação icônica, relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas. Destacamos também a noção de que essas atividades serão abordadas tanto em ambientes virtuais como fora deles.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE INVESTIGAÇÃO

> Para se realizar uma pesquisa, é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre um determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele. (LÜDKE, 1986:1).

Para a realização desta pesquisa, e de acordo com o quadro teórico desenvolvido no trabalho, concordamos com a idéia de que a pesquisa qualitativa é a mais apropriada para pesquisar o objeto de estudo proposto. Para Lüdke (1986), esse tipo de estudo é rico em descrições de situações e acontecimentos. Além disso, o interesse do pesquisador, ao estudar algum problema, é verificar como ele se manifesta nas atividades, procedimentos e interações cotidianas. Outra razão muito importante na escolha do tipo da pesquisa é o fato de que a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos e se preocupar bem mais com o processo do que com o produto durante as análise dos dados. (BOGDAN e BIKLEN, 1982, *apud* LÜDKE).

Como precisaremos delimitar nosso estudo, a abordagem apropriada para o desenvolvimento da pesquisa é o estudo exploratório, pois tem a finalidade de desenvolver, esclarecer conceitos e idéias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores (GIL, 1999).

3.1 Os sujeitos

O trabalho foi realizado com uma turma do terceiro ano e uma do quinto ano de uma escola pública de Fortaleza – Ceará – Brasil. Os alunos possuíam oito e dez anos, respectivamente. A faixa etária foi assim escolhida com o intuito de mesclar e delimitar nosso estudo. Foi realizado um sorteio de quatro alunos de cada ano para a realização da pesquisa, totalizando, assim, quatro alunos de oito anos e quatro alunos de dez anos. Quando chegávamos à sala de aula, explicávamos à turma toda que éramos estudante da faculdade e queríamos realizar uma atividade com quatro alunos, mas que cada aluno iria individualmente. Dissemos, também, que as atividades seriam feitas no computador, no papel e em uma balança de dois pratos. Falávamos um número da lista de chamada e esse aluno era o escolhido para realizar as atividades. O aluno escolhido era questionado se queria participar das atividades. A cada dia, o aluno participava de uma atividade. Todos os alunos sorteados para participar da pesquisa concordaram e realizaram todas as atividades propostas. Durante o estudo, nomes fictícios dos alunos são fictícios para explorar suas falas.

Dentre os alunos participantes, temos:

- Alunos do terceiro ano – Tatiana, Carol, Amanda, Marcos.
- Alunos do quinto ano – André, Ana, Vanessa, Felipe.

Todos os alunos sorteados estavam na faixa etária da sua série. Depois disso, foram realizadas atividades com o objetivo de analisar como se caracterizam as primeiras noções e conceitos que as crianças formulam sobre Álgebra. Para isso, em cada atividade foi feita uma entrevista clínica, utilizando o método clínico piagetiano[4]. As atividades foram as seguintes:

- situações-problemas verbais;
- balança interativa;
- balança seriada;
- balança de dois pratos para medir pesos e
- balança de dois pratos para comparar pesos.

Os tópicos seguintes explicam com detalhes a entrevista e as atividades realizadas neste estudo.

A pesquisa foi realizada em uma escola pública da cidade de Fortaleza. Possui laboratório de Informática com disponibilidade de uso para a realização das atividades no computador. Quando o laboratório não estava disponível para uso, a supervisora disponibilizava sua sala para a realização das entrevistas.

3.2 Situações-problemas verbais

As atividades (anexo 3) propostas aos alunos foram baseadas em um estudo realizado por Schliemann, Carraher, Brizuela, Jones (1998) as quais serão descritas a seguir.

São oito situações-problemas, atividades divididas em dois grupos: o primeiro consta de quatro problemas nos quais as quantidades das transformações aparecem, ou seja, são

[4] A explicação do método será procedida na seção de procedimento de coleta de dados.

explícitas; o segundo grupo é composto de quatro questões, mas as quantidades das transformações não aparecem. Vale ressaltar que os alunos resolveram todas as questões de uma vez só, sem divisão por grupo. Essa divisão foi aqui estabelecida para melhor entendimento de sua estrutura.

O objetivo dessa atividade é examinar se os estudantes compreendem que uma equação permanece igual se adicionarmos ou subtrairmos quantidades iguais para cada um de seus membros. Se, porém, as quantidades adicionadas ou subtraídas foram diferentes, encontraremos uma inequação, ou seja, os membros da equação serão diferentes.

Durante a resolução das situações-problemas, os alunos ficaram livres para usar ferramentas e representação que achassem necessárias, ou seja, puderiam resolvê-las da maneira que quisessem. Para cada problema, pedimos que o aluno justificasse suas respostas e explicamos que, quando perguntássemos o porquê de uma resposta dada, não significa que a resposta estava errada. Foi explicado também que aquela atividade era um trabalho de faculdade e que queríamos saber como ele resolvia os problemas. Os alunos tiveram disponibilidade de usar papel, caneta, lápis e canetinha colorida para resolver as questões.

Cada criança foi entrevistada individualmente para resolver as oito situações-problemas que eram lidas para os alunos como se fossem uma história. Os problemas são baseados em acontecimentos cotidianos nos quais às personagens descritas têm inicialmente a mesma quantidade de objetos, podendo ao final do problema ficar com quantidades iguais ou diferentes.

Ao longo da situação-problema, quantidades iguais ou diferentes foram adicionadas ou subtraídas de suas quantidades iniciais. Ao final, os alunos tiveram de dizer se as duas pessoas da situação-problema tenham ou não a mesma quantidade de objetos. Para cada situação problema, a lógica de resolução muda, ou seja, as situações problemas possuem uma estrutura diferente.

Na primeira questão, há subtração de duas quantidades iguais, logo, ao final, as duas pessoas envolvidas na situação-problema terão a mesma quantidade. Na segunda questão, teremos uma adição de duas quantidades diferentes, logo, ao final da situação-problema, as quantidades serão diferentes. Na terceira questão, encontraremos novamente uma subtração, no entanto, retirando duas quantidades diferentes. E, na quarta questão, encontraremos novamente uma adição, no entanto, acrescentando quantidades iguais. Na seqüência, explicaremos melhor sobre essas estruturas e a situação-problema do primeiro grupo de problemas que envolvem quantidades conhecidas.

Primeiro problema: subtração de duas quantidades iguais.

> 1. Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Bruno levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tiago levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tiago comeu 2 de seus chocolates e Bruno comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa que após o recreio Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que Bruno? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro?

No problema, Bruno tinha inicialmente dez chocolates e depois comprou mais dois chocolates, ficando com 12. Tiago levou cinco chocolates, comprou mais cinco e depois ganhou mais dois, ficando com 12 chocolates também. A estrutura final do problema é a seguinte:

10+2=5+5+2

10 + 2 (-2) = 5 + 5 + 2 (-2) ?

Ao final de cada situação, será perguntado à criança se depois das transformações, a equação continuará igual ou se ficará diferente.

Segundo problema: adição de duas quantidades diferentes.

> 2. Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes que Bárbara?

Ao final dessa situação, o aluno encontra quantidades diferentes. Apesar de Bárbara e Joana terem inicialmente a mesma quantidade de presentes, ao final da situação, Bárbara recebe mais presentes do que Joana, ficando, assim, com mais presentes. A estrutura dessa situação é:

7 = 7

7 (+6) = 7 (+3) ?

Terceiro problema: subtração de duas quantidades diferentes.

> 3. Patrícia e Daniel estão brincando fora da vizinhança. Como os dois gostam de laranja, foram nas suas casas pegar laranja. Patrícia pegou 6 laranjas e Daniel pegou 3. Depois eles voltaram para suas casas pegar mais laranja. Patrícia pegou mais 4 laranjas e Daniel pegou mais 3. Daniel voltou pela terceira vez na sua casa e retornou com mais 4 laranjas. Nessa hora chegou um amigo deles e Patrícia deu para esse amigo 6 laranjas e Daniel deu 3 laranjas. Você acha que, agora, depois de eles terem dado algumas laranjas Patrícia e Daniel tem a mesma quantidade de laranjas? Ou você acha que um tem mais laranja que outro?

Observe-se que, nesse problema, há uma subtração de quantidades diferentes em cada membro da equação. Ao final da situação, Patrícia e Daniel terão quantidades diferentes de laranjas. A estrutura dessa situação-problema é:

6+4=3+3+4

6 + 4 (-6) = 3 + 3 + 4 (-3) ?

Quarto problema: adição de duas quantidades iguais.

> 4. João e Sara estão brincando de bolas de gudes. João pegou 4 bolas de gudes do seu bolso esquerdo para brincar. João pegou então mais 4 bolas de gudes do seu bolso direito para brincar. Sara levou 8 bolas de gudes da sua coleção para brincar. Durante o jogo, Sara ganhou mais 2 bolas de gudes. João também ganhou 2 bolas de gude durante o jogo. Você acha que João tem a mesma quantidade de bolas de gude da Sara? Ou você acha que um tem mais bolas de gudes que outro?

Na quarta questão, observamos que os membros da equação permanecem iguais, pois a quantidade acrescida aos dois membros é a mesma. A estrutura dessa situação é:

4+4=8

4 + 4 (+2) = 8 (+2)?

Essas questões fazem parte do primeiro grupo, que envolvem quantidades, pois está explícita no problema a quantidade dos objetos. No segundo grupo de questões (da quinta a oitava questão), as quantidades desaparecem, fazendo com que o aluno pense de maneira mais intuitiva. A seguir listaremos os problemas com suas respectivas estruturas:

Quinto problema: subtração de duas quantidades iguais

> 5. Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você

acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

Estrutura do problema:

x= y+y

x + z (-z) = y+y + z (-z)?

Sexto problema: subtração de duas quantidades diferentes.

6. Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em uma cesta. Marcelo dividiu seus biscoitos em duas cestas. Então, eles pegaram um outro pacote. Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um depósito para comer depois. O irmão mais novo de Carlos foi à cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu para ela sua cesta de biscoito e Marcelo deu para ela uma de suas cestas de biscoito. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que o outro?

Estrutura do problema:

x+z=y+y+z

x +z (-x) = y + y + z + (-y)?

Sétimo problema: adição de duas quantidades iguais.

7. Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Cláudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Cláudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Cláudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?

Estrutura do problema:

x= y1+y2

x (+z) = y1+y2 (+z)?

Oitavo problema: adição de duas quantidades diferentes.

8. Em um fim de semana Lucas e Francisco foram pescar. No sábado eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do que outro?

Estrutura do problema:

x = x

y > z

x + y = x + z?

Estas são as situações-problemas verbais que fizeram parte do estudo. No próximo tópico, explicaremos quais foram os objetos de aprendizagem utilizados neste estudo.

3.3 Os objetos de aprendizagem

Os objetos escolhidos foram Balança Interativa e Balança Seriada. Esses objetos foram selecionados por trabalharem com conceitos algébricos, como maior, menor, igualdade, desigualdade e comparação entre valores desconhecidos. Nos tópicos seguintes, detalharemos cada objeto de aprendizagem.

Objetos de aprendizagem, denominados de OA, é um termo surgido no inicio do século XXI para indicar recursos digitais (vídeo, animação, simulação etc) os quais permitem que professores e alunos explorem conceitos específicos em matemática, ciências, linguagem etc. Embora não haja ainda um consenso sobre sua definição, vários autores concordam que objetos de aprendizagem devam: (1) ser digitais, isto é, possam ser acessados através do computador, preferencialmente pela Internet; (2) ser pequenos, ou seja, possam ser aprendidos e utilizados no tempo de uma ou duas aulas e (3) focalizar em um objetivo de aprendizagem único e específico.

3.3.1 Balança Interativa

O Balança Interativa baseia-se na manipulação simulada de uma balança de dois pratos na forma de um jogo, o qual consiste em descobrir os valores desconhecidos associados às letras. Na tela do programa, além de simular uma balança de dois pratos, temos também desenhos de pesos com letras que representam os pesos desconhecidos e desenhos de pesos com números que representam os pesos conhecidos. O usuário deverá utilizar o *software* para aferir os pesos conhecidos e desconhecidos, podendo encontrar seus valores por meio do equilíbrio ou desequilíbrio na balança. A balança fica em equilíbrio quando os pesos dos dois lados forem iguais (tiverem o mesmo peso). O desequilíbrio acontece quando um dos pratos da balança fica mais pesado do que outro.

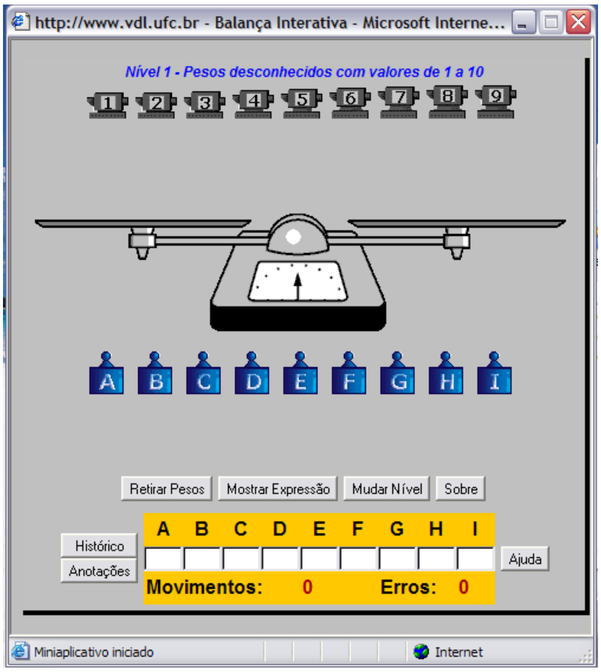


Figura 1 – Tela do objeto de aprendizagem Balança Interativa.

O OA possui dez níveis. Do primeiro ao quinto nível, ele apresenta a balança de dois pratos e a equação que representa os movimentos realizados. Do sexto ao décimo nível, o jogo apresenta apenas a equação. Esta diferenciação foi feita com o objetivo de levar o usuário a manipular equações de modo cada vez mais simbólico. Durante a pesquisa, utilizaremos apenas o primeiro nível, pois os outros níveis exigem nível maior de representação simbólica. Além disso, as atividades do primeiro nível já oferecem boa quantidade de estratégias de pensamento que os alunos podem formar.

No primeiro nível, o OA oferece pesos que variam de 1 a 10 e pesos desconhecidos, representados por letras que vão de A até o I. O aluno, então, terá de descobrir usando os valores conhecidos o valor dos pesos desconhecidos. Mediante suas hipóteses, e com o estabelecimento de combinações de igualdade e desigualdade, o aluno pode descobrir o valor do peso desconhecido. Por exemplo, se o aluno escolhe o peso A, coloca em um dos pratos da balança, escolhe o peso 6, põe no outro prato da balança e descobre que A é menor do que 6 (A < 6). O valor de A pode ser cinco, quatro, três, dois ou um. Depois dessa descoberta, ele pode fazer novas manipulações. O OA registra o número de manipulações que o aluno faz durante a descoberta dos pesos. Ao final do nível, o programa oferece a quantidade de manipulações que o aluno fez para descobrir todos os pesos desconhecidos.

Entre outras opções, o OA possui um botão para visualizar da equação algébrica representada na movimentação dos pesos. Esse botão estabelece uma ligação entre uma representação icônica ou simbólica com uma representação escrita. Outro botão é para contar a quantidade de movimentos que os alunos fazem durante a manipulação dos pesos. Este serve para identificar a quantidade de vezes que ele moveu os pesos. Supõe-se que, se o aluno diminui a quantidade de movimentos quando repete um nível, é porque está criando estratégias de manipulação. Há outro botão para retirar os pesos que estiverem nos pratos da balança sem o registro de movimentos, outro para mostrar o histórico dos movimentos já realizados e outro para anotações, caso o aluno queira fazer alguma anotação. O OA possui ainda um botão que poderá mudar de nível, outro que fornece informações sobre o programa e outro de ajuda (Anexo 1). Para melhor análise dos dados, o OA oferece uma opção de gravar todos movimentos que o aluno fará ao manipular os pesos. Essa opção facilitará posterior análise dos movimentos realizados.

3.3.2 Balança Seriada

Assim como no Balança Interativa, o Balança Seriada (anexo 2) simula uma balança de dois pratos. O objeto de aprendizagem possui apenas um nível e tem como objetivo fazer comparações entre os pesos cujos valores os alunos não conhece. Os pesos com valores desconhecidos são representados por uma caixa azul e variam de A até F. Sendo assim, os alunos terão seis pesos para fazer suas comparações.

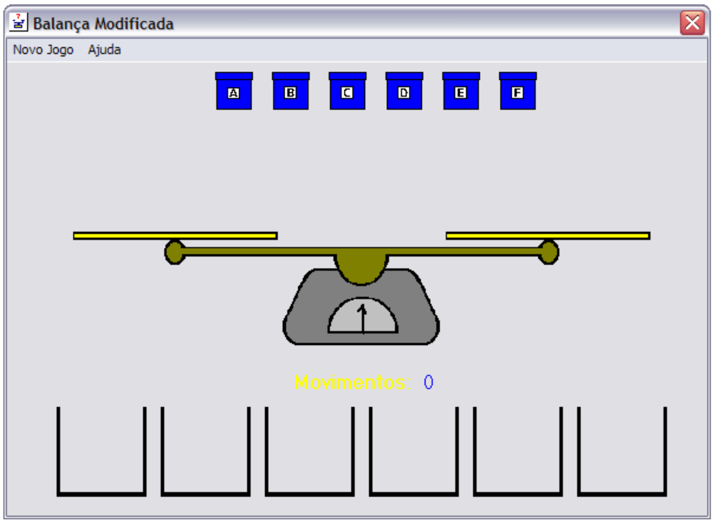


Figura 2 – Tela do objeto de aprendizagem Balança Seriada

Durante a manipulação dos pesos desconhecidos, o aluno terá de fazer comparações entre estes e colocar na ordem do menor para o maior de acordo com suas manipulações. Por exemplo, se o peso A é maior do que B e maior do que C e C é menor do que B e menor do que A, a ordem será dos pesos será: C, B e A.

O OA também conta o número de movimentos realizados com o objetivo de observar a quantidade de manipulações que o aluno fez para descobrir a seqüência dos pesos desconhecidos.

Esse OA não conta a quantidade de erros, pois seu objetivo é saber se, no final das manipulações, os alunos conseguem descobrir a real seqüência entre os pesos desconhecidos.

3.3.3 Balança de dois pratos

Neste estudo, duas atividades serão propostas para que os alunos utilizem a balança de dois pratos. A primeira atividade foi chamada de Balança de dois pratos (medindo pesos). Nela, os alunos tiveram de descobrir quanto pesam diferentes potes, utilizando os pesos que a balança oferece (50g, 100g, 200g, 500g, 1 kg e 2kg). Os pesos dos potes que os alunos buscaram descobrir foram de 150 gramas, 300 gramas, 350 gramas, 400 gramas, 450 gramas e 900 gramas. Os materiais que continham esses pesos foram elaborados da seguinte forma, respectivamente: três saquinhos de farinha, uma garrafa de soro fisiológico, um xampu, uma garrafa verde, um vidro com granola e uma garrafa transparente. Para fazer peso nas garrafas, no soro e no xampu, foi utilizado a água.

Figura 3 – Material confeccionado.

Os valores foram distribuídos dessa forma para que os alunos possam colocar mais de um peso em um lado da balança e, em algumas vezes, como no caso do 400g, 450g e 900g, os alunos terão de utilizar pesos nos dois lados da balança. Por exemplo, para descobrir os pesos da garrafa verde, o aluno terá de necessariamente colocar no prato do peso desconhecido, que, nesse caso, é a garrafa que vale 400g, um peso de 100g e, no outro prato, terá de colocar 500g. O aluno terá, então, a seguinte expressão algébrica: $x + 100 = 500$. Se o aluno não conseguir fazer esse tipo de raciocínio durante o jogo, ele é estimulado a elaborar tal pensamento, por exemplo: onde tem mais peso? Onde tem menos peso? A gente tem de colocar peso aqui ou tirar peso daqui?

Durante a manipulação, o aluno é questionado sobre a relação entre os pesos. Por exemplo, se é maior, menor ou igual. Caso o aluno achasse a igualdade, era pedido que ele explicasse como foi que ele descobriu. Se o aluno tivesse dificuldade de explicar no caso de utilização de pesos conhecidos nos dois lados da balança, como no exemplo de há pouco, ele era estimulado a pensar sobre qual o valor que acrescido de 100 é igual a 500.

A segunda atividade, utilizando a balança de dois pratos, tem o objetivo de levar os alunos a ordenar seis potes com o mesmo formato, porém com pesos diferentes em uma ordem crescente ou decrescente. Os potes eram diferenciados pela cor e ficaram com os seguintes pesos:

- pote branco – 50 gramas;

- pote preto – 100 gramas;
- pote verde – 150 gramas;
- pote vermelho – 200 gramas;
- pote azul – 250 gramas;
- pote amarelo – 300 gramas.

Figura 4 – Potes confeccionados.

Os alunos não tiveram acesso a pesos conhecidos para descobrir o valor dos potes, apenas tiveram de compará-los entre si e ordená-los em uma seqüência do menor para o maior.

Essas atividades foram elaboradas para dar suporte às atividades computacionais (Balança Interativa e Balança Seriada) e para entender como se processa o pensamento algébrico, tanto em ambientes computacionais como fora dele.

Figura 5 – Balança de dois pratos

3.4 Procedimento de coleta de dados

Para que possamos compreender como os alunos utilizam as noções iniciais no campo da Álgebra, eles participaram de um método clínico com o intuito de observar e analisar como se processa o desenvolvimento de tais noções.

Essa entrevista clínica é baseada nos estudos de Piaget (1994) e é chamada de método clínico piagetiano. Segundo Delval (2002), esse método consta de perguntas básicas que variam de acordo com as respostas do sujeito e dos interesses que orientam a pesquisa que está sendo realizada.

> O método clínico é um procedimento de coleta de dados para o estudo do pensamento da criança (embora também se aplique ao estudo do pensamento dos adultos) que se realiza mediante entrevistas ou situações muito abertas, nas quais se procura acompanhar o curso do pensamento do sujeito ao longo da situação, fazendo sempre novas perguntas para esclarecer respostas anteriores (DELVAL, 2002:12).

Por esse método, o pesquisador tem a oportunidade de formular novas perguntas em função das respostas do sujeito, proporcionando melhor entendimento de como o sujeito representa uma situação e/ou organiza seu pensamento.

Esse método foi utilizado em todas as atividades (situações-problemas, Balança Interativa, Balança Seriada e as situações propostas em uma Balança de dois pratos) em busca de entender o raciocínio das crianças durante a resolução das situações-problemas.

A seqüência de resolução de cada atividade foi mudada para verificar se o desempenho dos alunos será diferente, ao resolver inicialmente atividades em ambientes computacionais ou em atividades fora desse ambiente.

A seqüência das atividades se constituirá da seguinte forma:

- 1a. seqüência – situações problemas, balança de dois pratos (medindo pesos), Balança Seriada, Balança de dois pratos (comparando pesos) e Balança Interativa.
- 2ª. seqüência – situações problemas, Balança Seriada, balança de dois pratos (medindo pesos), Balança Interativa, balança de dois pratos (comparando pesos).
- 3ª. seqüência – balança de dois pratos (medindo pesos), Balança Seriada, balança de dois pratos (comparando pesos), Balança Interativa e situações-problemas.

- 4ª. seqüência – balança seriada, balança de dois pratos (medindo pesos), balança interativa, balança de dois pratos (comparando pesos) e situações-problemas.

Para cada seqüência, pretende-se entrevistar dois alunos. Sendo assim, faz-se um total de oito alunos como se estabeleceu nas discussões procedidas linhas atrás.

4 ANÁLISES E DISCUSSÕES

Para a realização das análises, descreveremos como os alunos participaram das atividades, fazendo um recorte das suas falas. Na análise de suas respostas durante as atividades propostas, categorizamos o desempenho, as estratégias de resolução e as dificuldades que os alunos apresentaram no decorrer das atividades. Nesse bloco, analisamos o desempenho dos alunos nas atividades descritas no tópico anterior e serão analisadas na seguinte ordem: situações-problemas, balança de dois pratos (medindo pesos), Balança Interativa, balança de dois pratos (comparando pesos) e Balança Seriada. Essa seqüência foi escolhida aleatoriamente para fazer o estudo qualitativo. Logo após, será feita uma análise quantitativa do desempenho, estratégias e dificuldades para saber se houve influência nas seqüências das atividades.

Nessa perspectiva, cada atividade terá uma análise do desempenho dos alunos. Este nos proporcionará uma visão geral de como eles estabelecem suas estratégias e como dão significado àquelas atividades. Assim, durante a análise, além de categorizar estratégias, temos interesse em perceber como essas atividades promovem a superação das dificuldades em conceitos algébricos.

Este capítulo se divide em dois tópicos. Primeiramente, descreveremos as categorias de estratégias de resolução, desempenho e dificuldades encontradas durante cada atividade proposta no estudo. Logo após, exemplificamos as categorias encontradas, com transcrições dos diálogos entre nos e os alunos entrevistados. Fazemos também uma análise quantitativa, mostrando algumas tabelas que demonstram como o aluno resolveu aquela situação.

4.1 Categorias de desempenhos, estratégias e dificuldades

A análise das respostas e a explicação do pensamento durante as entrevistas clínicas serve de suporte para entender como as crianças estão pensando durante as atividades algébricas e quais são suas dificuldades. Para isso, mostraremos parte das entrevistas para ilustrar de forma clara cada categoria encontrada.

A seguir, explicaremos as categorias de desempenho, estratégias de resolução e dificuldades por atividades.

4.1.1 Situações problemas verbais

Na seqüência, classificamos as categorias que identificam o desempenho, as estratégias e as dificuldades.

Desempenho

a. acerto imediato – o aluno após leitura do problema, acerta, continua acertando mesmo com nossas refutações;
b. correção do erro – erra o problema e depois acerta com as nossas refutações, chegando ao final do problema com a resposta certa e
c. erro contínuo – erra e continua errando, mesmo com as nossas refutações.

Estratégias de resolução

a. cálculo mental – o aluno calcula mentalmente os problemas e explica oralmente;
b. icônica – utiliza ícones ou faz desenhos para resolver os problemas e
c. numérica – usa números para resolver o problema.

Dificuldades:

a. manipular dados – o aluno sente dificuldade em manipular os dados dos problemas, ou seja, perde-se no enunciado, precisando ler várias vezes o problema para conseguir resolvê-lo e
b. resolver algoritmos – sente dificuldade em resolver o problema, utilizando Aritmética, ou seja, o aluno apresenta dificuldade em somar, diminuir, dividir ou montar a expressão matemática.

4.1.2 Balança de dois pratos (medindo pesos)

Nessa atividade, categorizamos apenas as estratégias de resolução que foram surgindo ao longo da manipulação dos objetos na balança de dois pratos. Não categorizamos o desempenho, pois os alunos sempre descobriram os pesos solicitados.

Dentre as estratégias, categorizamos:

a. Subtrativa – o aluno acha determinado peso, colocando um peso conhecido de um lado da balança e outro do mesmo lado dos pesos desconhecidos. O uso da subtração consiste em constatar que, ao acrescentar um peso em um prato da balança, é equivalente a subtrair o valor desse peso no outro prato da balança;

b. análise do intervalo – analisa o intervalo possível que um peso pode ter. Então, se um peso é maior do que 100 gramas e menor do que 400 gramas, é porque o peso desconhecido pode estar dentro desse intervalo;

c. estimativa – quando o aluno coloca na balança o peso aproximado do valor que ele representa, aumentando ou diminuindo de forma gradativa. Nesse caso, o aluno procura estimar o peso antes de colocar na balança. Por exemplo, se achar que o peso pode valer aproximadamente 200 gramas, coloca esse valor na balança de dois pratos.

Para essa atividade, a única dificuldade constatada foi somar os pesos que estão na balança. Geralmente o aluno sentia dificuldade nas operações de soma e subtração para descobrir o valor do peso.

4.1.3 Balança Interativa

Para essa atividade, categorizamos o número de movimento como o desempenho dos alunos durante a manipulação no OA Cada vez que o aluno põe um peso na balança, um movimento é registrado na tela inicial do programa. O fato de registrar o número de movimentos nos mostra se os alunos estão resolvendo por tentativa e erro ou se realmente estão utilizando estratégias de resolução. Os alunos faziam duas vezes a mesma atividade com o intuito de reduzir o número de movimentos. A análise dos números de movimentos será feita posteriormente, na análise quantitativa, para comparar os índices entre os alunos e observar se diminuiu esse número na segunda tentativa do objeto de aprendizagem.

As estratégias de resolução são bastante parecidas com as da atividade anterior, porém com algumas diferenças:

a. análise do intervalo – o aluno analisa o intervalo possível que um peso pode ter. Então, se um peso é maior do que dois e menor do que cinco, é porque o peso desconhecido pode estar dentro desse intervalo, ou seja, pode ser três ou quatro;
b. observação dos pesos já registrados – o aluno observa os pesos que já saíram e os elimina, dentro de suas possibilidades;
c. busca pela metade – consiste em encontrar cada peso, iniciando com a metade dos valores possíveis. Por exemplo, ao tentar descobrir o valor de qualquer peso, o aluno inicia com o número 5. Se o programa apresentar maior do que cinco, o peso desconhecido pode ser 6, 7, 8, 9 ou 10. Se for menor do que cinco o peso pode ser 4, 3, 2 ou 1. Sendo o valor do peso igual a 5, o aluno encontrou a solução do problema. Essa estratégia lhe permite diminuir pela metade o valor do intervalo que o peso desconhecido pode ter. Consideramos também busca pela metade quando os alunos utilizam o quatro e o seis;
d. intercalar pesos – o aluno não usa uma seqüência de pesos para tentar descobrir um valor desconhecido, e sim utiliza a seqüência alternada. Por exemplo: se testou C como 7, percebendo que era maior, testa com 10 para observar sua relação. Sendo menor, o aluno percebe que C pode ser oito ou nove;
e. seqüência de pesos – o aluno tenta uma seqüência de peso para descobrir o valor desconhecido. Por exemplo, para descobrir o valor do peso B, coloca o peso 1 (um), logo depois o 2 (dois), em seguida o 3 (três), e assim sucessivamente até achar o peso e
f. uso de extremidades – o aluno inicia a descoberta de um peso pelos valores da extremidade, ou seja, o aluno utiliza o peso 1 (um) ou 9 (nove) para tentar descobrir cada novo peso.

Observamos apenas duas dificuldades:

a. verbalizar – o aluno não consegue explicar por que encontrou o valor de um peso.
b. aritmética – não faz relação com os pratos da balança, ou seja, não sabe quando está maior, menor ou igual.

4.1.4 Balança de dois pratos (comparando pesos)

Para essa atividade, não foi categorizado o desempenho, pois todos os alunos acertaram a seqüência pedida. A análise dessa atividade revelou as seguintes estratégias:

a. estimativa – o aluno compara os pesos com a mão, testando suas hipóteses na balança;
b. comparação sistemática – compara um peso com todos para descobrir se ele é realmente o mais leve ou mais pesado e
c. comparação aleatória – fica comparando os pesos aleatoriamente, sem nenhuma estratégia de resolução.

Essas estratégias poderiam ser usadas ao mesmo tempo pelos alunos, pois, muitas vezes, quando confrontava os potes com a mão, poderiam também fazer comparações sistemáticas e comparar aleatoriamente.

Analisando o desempenho dos alunos durante essa atividade, percebemos que eles não demonstraram aparente dificuldade em realizá-la. Por esse motivo, não fizemos categoria das dificuldades.

4.1.5 Balança Seriada

As estratégias encontradas nessa atividade foram idênticas às da anterior, já que as duas são bastante parecidas. O que vai mudar é que uma é no computador e a outra é em uma balança concreta. No entanto, destacamos o uso de axioma para descobrir a relação dos pesos:

a. uso de axioma –usamos algumas perguntas para ajudar o (a) aluno (a) a descobrir a relação de peso entre dois pesos não colocados na balança. Por exemplo, questionamos aos alunos: se A é maior do que B e B é maior do que C, o C é maior ou menor do que A? Se o aluno entender os questionamentos, não precisa testar a relação entre A e C;

b. comparação sistemática – o aluno compara um peso com todos para descobrir se ele é realmente o mais leve ou mais pesado e

c. comparação aleatória – fica comparando os pesos aleatoriamente, sem nenhuma estratégia de resolução.

Durante a análise dessa atividade, não identificamos o desempenho dos alunos, pois, dos oito, somente um errou uma seqüência. Consideramos esse fato insignificante perante o total da amostra. Vale ressaltar que o aluno errou somente uma posição de pesos em virtude de uma confusão durante a atividade em ver quais eram os potes maior e menor.

A seguir, analisaremos o desempenho dos alunos, considerando suas respostas e dificuldades encontradas ao longo das atividades.

4.2 Análises das respostas

Para ilustrar a categorização das estratégias e dificuldades, mostramos algumas transcrições das explicações das respostas e do raciocínio dos alunos. Mediante as transcrições e analisando suas estratégias de resolução, desempenho e raciocínio, organizamos algumas idéias referentes ao pensamento algébrico e ao uso de atividades manipulativas. Procuraremos, assim, fazer um paralelo do seu raciocínio com o pensamento algébrico.

Durante os recortes, utilizamos A para aluno e P para pesquisadora. O texto escrito em colchetes ([ ]) não faz parte da transcrição, e sim, é uma descrição de algo que ocorreu na sala ou para explicar melhor a situação ocorrida.

Dividiremos as análises por atividade. Os recortes seguintes se referem às atividades das situações-problemas, fazendo uma exemplificação do desempenho, da estratégia e das dificuldades.

4.2.1 Situações problemas verbais

Primeiramente descreveremos o desempenho dos alunos, depois as estratégias de resolução e, logo em seguida, as dificuldades.

4.2.1.1 *Desempenho*

<u>Acerto imediato</u>

Dentro da categoria acerto imediato, podemos destacar alguns recortes. A seguir, a aluna Tatiana, do 3º. ano, responde de imediato, apesar da demora em explicar seu pensamento.

E: Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Bruno levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tiago levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tiago comeu 2 de seus chocolates e Bruno comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa de que após o recreio Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que Bruno? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro?

A: Quantidades iguais.

E: Por quê?

A: [fica calada].

E: Quantos chocolates o Bruno tem?

A: Dez.

E: E quantos chocolates o Tiago tem?

A: Dez.

E: E no recreio o Tiago comeu quantos chocolates?

A: Dois.

E: E o Bruno comeu quantos?

A: Dois.

E: E depois ficaram com a mesma quantidade de biscoitos ou ficaram com quantidades diferentes?

A: A mesma quantidade.

E: Ficaram com quantos chocolates?

A: [Pensando].

E: Quantos chocolates o Bruno tinha?

A: Dez.

E: E o Tiago?

A: Dez.

E: O Bruno comeu quantos?

A: Dois.

E: Ficou com quantos?

A: Com cinco [aluna responde errado].

E: Mas se ele tem dez chocolates e comeu dois chocolates. Ficou com quantos?

A: Oito!

E: E o Tiago tinha quantos?

A: Dez.

E: Ficou com quantos?

A: Oito.

E: Você quer resolver pra mim?

A: Como?

E: Fazer um cálculo.

A: [Fica pensativa]

E: Pode desenhar também. Fazer qualquer coisa.

A: Ta [desenha bombons]

E: O que é isso aí?

A: Bombom.

A aluna mostrava-se muito tímida e ficava calada quando pedíamos explicações. Ao final da explicação, perguntamos se queria calcular ou desenhar. Nos problemas 1, 2 e 3, ela desenhou a situação do problema. Nos problemas seguintes, não quis calcular nem desenhar, preferindo somente explicar seu raciocínio verbalmente. A figura 1 representa o desenho que a aluna fez para responder ao recorte anterior. A aluna desenhou dez bombons para Tiago e Bruno. Depois escondeu com os dedos os dois bombons que cada um comeu, descobrindo a quantidade final dos dois.

Figura 6 – Desenho da aluna Tatiana para resolver o primeiro problema.

Apesar de o desenho ser categorizado como uma estratégia, utilizamos o exemplo para ilustrar a resolução do problema questão acima. Logo a seguir, no tópico de desenhos, mostraremos mais sobre essa estratégia de resolução utilizada pelos alunos.

Carol, também do 3º.ano, mostrou entender o sentido relacional existente nos problemas. O recorte na seqüência ilustra a maneira como a aluna resolveu a segunda questão:

E: Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes como Bárbara?
A: Não. Ô, ta aqui sete, né? Ela ganhou sete [a Bárbara]. Ela também [a Joana]. Depois ela [Bárbara] ganhou seis. E a outra três. Não pode ser igual.
E: Quantos presentes a Bárbara ganhou?
A: Treze.

Quando não aparecem números explícitos nos problemas, os alunos não demonstraram dificuldades. Observemos, agora, o raciocínio da aluna Tatiana durante a resolução do sexto problema:

E: Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em uma cesta. Marcelo dividiu seus biscoitos em duas cestas. Então, eles pegaram um outro pacote. Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um depósito para comer depois. O irmão mais novo de Carlos foi na cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu pra ela sua cesta de biscoito e Marcelo deu pra ela uma de suas cestas de biscoito. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que os outro?
A: Tem a mesma quantidade.
E: Por quê?
A: Porque ele tem uma cesta... [pausa 3 segundos] Tem quantidade diferente!!!
E: Por quê?
A: Carlos...
E: Ele deu uma cesta... [pensando]
E: O Carlos têm quantas cestas?
A: Uma.
E: E o Marcelo?
A: Duas.

E: o Carlos deu o que para o irmão dele?

A: Uma cesta.

E: E o Marcelo deu...

A: Uma cesta.

E: Mas e aí? Eles ficaram com os mesmos biscoitos?

A: Não.

E: Por quê?

A: Porque o Carlos deu a cesta dele e ficou só com o deposito e o Marcelo ficou com uma cesta e um depósito.

E: Por que ele ainda ficou com uma cesta?

A: Porque ele não deu a outra.

E: Ah... e ele tinha duas?

A: Era.

E: Tu quer desenhar alguma coisa?

A: [faz não com a cabeça]

É importante ressaltar que, mesmo a aluna tendo errado no começo da entrevista, consideramos acerto imediato, já que, logo depois, consertou seu erro. Observa-se, nesse problema, que a aluna trabalha com igualdades, mesmo com relações desconhecidas, e sabe operar sobre essas relações. Mesmo a aluna sabendo que Marcelo tem duas cestas e Carlos somente uma, não atrapalha o seu raciocínio em afirmar que possuem a mesma quantidade de biscoitos. Se a aluna fosse resolver esse problema algebricamente, como é cobrado na escola, teria de escrever a seguinte expressão: $x + z = y + y + z$, onde x é igual a $y + y$, sendo x a cesta de Carlos, z cada depósito e y as duas cestas de Marcelo. Depois, teria de retirar uma cesta de cada um, ficando a seguinte expressão: $z < + y + z$, isto indica quantidades diferentes. Um problema dessa estrutura não é difícil para a aluna, pois não é exigida a manipulação simbólica nem o trabalho com letras desconhecidas. Fazer com que o aluno raciocine sobre essas relações é bem mais eficaz do que simplesmente exigir a manipulação de símbolos.

A aluna Carol também soube explicar seu raciocínio ao resolver o oitavo problema. Vale ressaltar que, no começo, a aluna sentiu dificuldade em resolver o problema sem o número, mas, ao final da atividade, já se mostram mais confiante, observemos:

E: Em um fim de semana Lucas e Francisco foram pescar. No sábado, eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram que Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do que outro?

A: Um ficou mais que o outro.

E: E quem ficou com mais?

A: Foi o Lucas.

E: Por que que o Lucas ficou com mais?

A: Porque ele pegou, pescou mais peixes do que o Francisco.

E: Mas no sábado eles não pescaram a mesma quantidade?

A: Foi. Ai no outro ele pegou mais.

E: Então quem pescou mais? Foi o Lucas ou o Francisco?

A: O Lucas.

E: Por quê?

A: Por causa que o Lucas, ele pegou mais peixe. Lucas pescou mais do que Francisco.

E: Vai calcular ou desenhar alguma coisa?

A: Não. Já dá pra saber.

Nota-se que ela, mesmo com refutações e confrontos da nossa parte, mantém seu raciocínio e resposta, mostrando, assim, segurança no seu pensamento. Consideramos que a aluna está utilizando o pensamento algébrico, já que uma de suas características é poder operar sobre números desconhecidos.

O aluno André verbaliza bem que entende a quarta questão da situação-problema na explicação abaixo:

E: [ler o problema para o aluno].

A: [pensando]. A mesma quantidade. A Sarah, ela tinha oito já. Aí o João tinha quatro, voltou na casa dele e pegou mais quatro, aí durante o jogo ele ganhou mais duas. E a Sarah também ganhou duas. Aí cada um tinha oito e ganhou mais duas. Aí duas com oito forma dez. Então dez pra cada.

E: Então os dois ficaram com a mesma quantidade ou diferente?

A: igual.

A aluna Ana resolveu o quinto problema, mesmo não tendo números e, com os nossos confrontos, não mudou seu conceito.

E: [leitura do problema cinco]. Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

A: Eu acho que os dois tem o mesmo tanto.

E: Por quê?

A: Por causa que é... Rodrigo e André a primeira vez ele tinham o mesmo tanto, de tarde também. No dia seguinte eles foram pescar e descobriram que tinham o mesmo tanto.

E: Mas eles não puseram em um saco?

A: É! Mas só que eu acho [pausa], é o mesmo número de concha.

E: Eles dividiram em que?

A: Em caixas e sacos.

E: Eles perderam os sacos?

A: Foi.

E: E nessas caixas tinham o mesmo número de conchas?

A: Porque o André dividiu em duas e Rodrigo em uma.

E: Certo, mas e ai? Um não tem mais que o outro não?

A: Tinha a mesma quantidade sendo que André dividiu em duas [caixas] e Rodrigo só botou em uma.

Nessa situação, a aluna Ana conseguiu fazer relações de igualdade e divisão de números desconhecidos. Apesar de André ter duas caixas (2x), não significa que Rodrigo, tendo uma caixa (y), vai ter menos conchas.

<u>Correção do erro</u>

Nessa situação, Tatiana inicialmente errou, mas nossas perguntas fizeram com que analisasse novamente a estrutura do problema.

E: João e Sara estão brincando de bolas de gudes. João pegou 4 bolas de gudes do seu bolso esquerdo para brincar. João pegou então mais 4 bolas de gudes do seu bolso direito para brincar. Sara levou 8 bolas de gudes da sua coleção para brincar. Durante o jogo, Sara ganhou mais 2 bolas de gudes. João também ganhou 2 bolas de gude durante o jogo. Você acha que João tem a mesma quantidade de bolas de gude da Sara? Ou você acha que um tem mais bolas de gudes que outro?

A: Sara tem mais quantidade que o João.

E: Por quê?

A: Hum... [Pensando e lendo novamente o problema... uma, duas, três, quatro..] A Sara ficou com 10 bolas.

E: E o João? Ele tinha quantas bolas?

A: Tinha 8.

E: A Sarah tinha quantas?

A: 10.

E: O João ganhou alguma bola?

A: Não. Ficou com a mesma quantidade.

E: Hum... Certo. Quantas bolas o João ficou no final?

A: Dez.

E: E a Sara?

A: Dez.

Observa-se que a aluna não observou os dados do problema, dando uma resposta final errada. Com nossas perguntas, porém, a aluna conseguiu encontrar seu erro. Esse tipo de questão exige que o aluno aumente em cada um dos membros (ou partes) da equação a mesma quantidade para ficar igual. Com essa atividade, o aluno compreende que uma equação não muda, desde que adicionemos amesma quantidade em cada um dos seus membros.

Na transcrição seguinte, Ana inicialmente errou a resolução do problema sete, mas, nossos questionamentos, conseguiu fazer uma depuração do erro.

E: Vamos para o sétimo problema. Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Cláudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Cláudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Cláudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?

A: Acho que quem tem mais é a Cláudia, porque ela colocou todos seus selos em um álbum.

E: E a Rosa?

A: Em um.

E: Quando ela coloca tem mais quer dizer que ela tem mais?

A: Por causa que ela é... que ela é...como eu posso dizer, tinha mais porque, por causa que se ela tivesse menos que a Rosa ela ia botar em um álbum só.

E: Mas aqui não ta dizendo assim, antes do Natal Rosa e Cláudia tinha a mesma quantidade de selo.

A: Ah! Então elas têm a mesma quantidade de selos. Porque a Cláudia pegou e dividiu.

E: Mas tu não disse que a Cláudia tinha dois álbuns e mais selos?

A: As duas têm a mesma quantidade porque antes do Natal as duas tinham a mesma quantidade. Depois do Natal elas também ganharam selos e tinham a mesma quantidade. Sendo que a Cláudia quis colocar em dois álbuns.

E: E quando tem dois álbuns, não tem mais selos?

A: Era, é pro causa que eu achava por ela ter tinha dividido em duas é porque tinha mais, mas só que não.

A aluna Vanessa também percebeu que estava errada quando fizemos algumas refutações. Observemos:

E: Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

A: Eu não entendi tia.

E: Esse problema não tem número, nos temos que ver se eles têm a mesma quantidade ou quantidade diferente.

A: [lê novamente o problema]. Um tem mais concha que o outro.

E: Por quê?

A: Porque aqui tem dizendo que as conchas que Rodrigo encontrou colocou na caixa grande e André o mesmo que o Rodrigo mas dividiu igualmente. O André tem menos e o Rodrigo tem mais. O André deu a metade que ele achou pra ele.

E: Mas ta dizendo no problema que ele deu a metade?

A: Dividiu igualmente em duas caixas iguais. O Rodrigo colocou na caixa grande e o André nas duas caixas pequenas.

E: ai de tarde eles colocaram nos sacos mas eles perderam sacos. Tu acha que contando as caixas eles tem quantidade diferente ou igual?

A: Não, acho que tem igual.

E: Por quê?

A: Por causa que a pequena vai dá duas grandes, ô... uma grande dá duas pequenas.

Mediante, podemos perceber que Tatiana apenas se esqueceu de somar um dos procedimentos do problema. Já na segunda transcrição, inicialmente, a aluna acha que Cláudia tem mais selos porque tem mais álbuns, mas percebe a divisão de quantidades desconhecidas quando ela fala: *Ah! Então elas têm a mesma quantidade de selos. Porque a Cláudia pegou e dividiu.*

Na última transcrição, percebemos que o erro do aluno é apenas de interpretação dos dados do problema, achando que André tinha dado suas conchas a Rodrigo.

Analisando os dois últimos recortes, percebemos a seguinte estruturação do pensamento: $x/2 + x/2 = x$. É certo que ela não usou a linguagem matemática, mas o que nos interessa é fazer com que as crianças comecem a usar essas relações.

No quinto problema, a aluna Carol errou e acertou algumas vezes, dependendo das nossas refutações. Observemos o recorte:

E: Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

A: Tia, como é que vou saber se não tem número?

E: Será que não dá pra saber sem o número?

A: Hum, hum. [faz não com a cabeça].

E: Eu acho que pode.

A: [aluna fica pensando e lê o problema em silêncio].

E: Eles foram pescar cedo da manhã certo? Eles acharam conchas. Rodrigo colocou suas conchas onde?

A: Na caixa.

E: E ao André?

A: Nas caixas.

E: Em quantas caixas?

A: Duas.

E: Mas e ai? Eles encontraram o mesmo número de concha?

A: Sim.

E: E ai? De tarde o que aconteceu?

A: De tarde eles foram novamente à praia e encontrou outra vez a mesma quantidade , ai ele botou no saco.

E: Você acha que quando eles perderam os sacos eles continuaram com a mesma quantidade?

A: Não.

E: Por que não?

A: Porque eles ainda têm a caixa.

E: Mas o que tem na caixa tem a mesma quantidade ou quantidade diferente?

A: A mesma.

E: Mas e então? Eles têm mesma quantidade ou quantidade diferente?

A: A mesma quantidade.

E: Mas o André não tem duas caixas?

A: É.

E: E o Rodrigo só tem uma.

A: É.

E: Eles continuam com a mesma quantidade?

A: Não.

E: Por que não?

A: Porque o Rodrigo tem uma e a André tem duas.
E: quando tem duas caixas tem mais conchas?
A: Hum rum [diz que sim]
E: Mesmo pegando a mesma quantidade de concha?
A: Sim.
E: Eles pegaram a mesma quantidade de cochas. O Rodrigo pegou uma caixa e o André duas caixas. Eles têm quantidades diferentes?
A: Tem.
E: Por quê?
A: Cada um tem o mesmo tanto igual
E: Mesmo o André tendo duas caixas e o Rodrigo uma?
A: Mas só que o André tem a mesma quantidade de Rodrigo.

Nota-se, nesse recorte, que a aluna sempre responde de acordo com nossas perguntas. Se a indagação confronta sua idéia inicial, ela sempre muda sua resposta. Ressalta-se que a aluna errou e acertou várias vezes, dependendo das nossas perguntas.

Erro contínuo

Verifiquemos o recorte e vejamos como Tatiana não muda sua opinião sobre as relações:

E: Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Cláudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Cláudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Cláudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?
A: A... uma tem mais selo que a outra.
E: Uma tem mais que a outra? Por quê?
A: Porque a Cláudia botou em um álbum e a outra botou em dois álbuns.
E: Mas elas ganharam a mesma quantidade de selos?
A: [faz sim com a cabeça]
E: Ganharam?
A: Eu acho que uma botou bem muito e a outra também botou bem muito.
E: Ta. Mas quem tem mais?
A: A Rosa.
E: Por que ela tem mais?
A: Porque ela botou só 20.

E: Onde tem vinte? Eu vou ler de novo. Rosa e Cláudia colecionam selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum e Cláudia colocou todos seus selos em dois álbuns. Mas elas tinham quantidades iguais ou diferentes?
A: Diferentes.
E: Por quê?
A: Porque a Cláudia botou em dois álbuns. A outra tinha a metade.

Mesmo com nossas in tervencoes, a aluna continua fazendo afirmações errôneas sobre o problema. Nesse caso, acha que uma tem o dobro da outra por ter dois álbuns. Ainda que o problema esteja expressando que asduas ficaram com a mesma quantidade de selos, a aluna não consegue entender o problema.

Observamos, ainda, uma explicação incoerente quando ela explica, dizendo que a Rosa tem 20 selos. Esse tipo de resposta nos mostra que ela possui dificuldade em explicar seu raciocínio. Uma seção foi reservada para explicar melhor as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Observamos também que, durante as transcrições, sempre indagávamos: quem tem mais? Quem tem menos? Quanto ele pegou? Quanto ele ganhou? Essas perguntas foram feitas, com o intuito de estimular o aluno a explicar seu raciocínio, já que, muitas vezes, eles ficavam calados e temerosos de falar. Podemos explicar esse fenômeno pelo fato de as crianças dessa idade apresentarem dificuldade em expressar e verbalizar seu raciocínio. Além disso, não são estimuladas a nos fornecer respostas verbais no cenário de sala de aula.

O aluno Marcos também não conseguiu entender a relação do terceiro problema:

E: Patrícia e Daniel estão brincando fora da vizinhança. Como os dois gostam de laranja, foram nas suas casas pegar laranja. Patrícia pegou 6 laranjas e Daniel pegou 3. Depois eles voltaram para suas casas pegar mais laranja. Patrícia pegou mais 4 laranjas e Daniel pegou mais 3. Daniel voltou pela terceira vez na sua casa e retornou com mais 4 laranjas. Nessa hora chegou um amigo deles e Patrícia deu para esse amigo 6 laranjas e Daniel deu 3 laranjas. Você acha que, agora, depois de eles terem dado algumas laranjas Patrícia e Daniel tem a mesma quantidade de laranjas? Ou você acha que um tem mais laranjas que o outro?
A: Diferente.
E: Por quê?
A: Por que Daniel tinha três, deu mais três pros amigos dele e ficou com 3.
E: Mas o Daniel foi pegar mais laranja, e ainda foi pra sua casa pela terceira vez.
A: [pensando].

E: Me explica como tu fez.

A: E porque ele deu seis pros amigos dele e ela deu quatro.

E: Não, ela que deu quatro.

A: Aí ela ficou com sete.

E: Quantas laranjas ela tinha?

A: Treze.

E: Como tu viu que ela tinha treze?

A: [não responde e fica lendo o problema].

E: Vamos lá, ela pegou seis e depois pegou mais quantas?

A: mais seis.

E: Onde ta dizendo isso, me mostra.

A: [pensando]

E: Depois dessas seis, ela pegou mais alguma?

A: Ta aqui, quatro.

E: Ela pegou mais alguma?

A: Não.

E: Então ela tinha quantas laranjas?

A: Só Seis.

E: Mas ela não pegou 4?

A: [pensando] Dez.

E: E o Daniel tinha quantas?

A: Sete.

E: Mas antes de ela dá algumas laranjas, ele tinha sete?

A: Dez.

E: Como você sabe?

A: Por que aqui tem sete.

E: Onde tem sete?

A: Aqui, quatro mais três.

E: E esse outro três?

A: Então, é dez.

E: Então, eles tinham quantidades iguais ou diferentes?

A: Igual.

E: Depois de dá algumas laranjas eles ficaram com quantidades iguais ou diferentes?

A: Não.

E: Com quantas eles ficaram?

A: Daniel ficou com sete e a menina deu três e ficou com sete. Os dois ficaram com sete.

E: Os dois ficaram com sete?

A: Foi.

E: Eles tinham quantas laranjas?

A: Dez.

E: A Patrícia deu quantas?

A: Seis;

E: O Daniel deu quantas?

A: Três.

E: Os dois ficaram com a mesma quantidade?

A: Sim.

E: Mas você me disse que a Patrícia deu mais quantidade.

A: Ficou com mais foi Daniel.

E: Ficou com quantas?

A: Sete.

E: A Patrícia ficou com quantas?

A: Sete.

Constatam, neste protocolo, que o aluno consegue estabelecer relações entre as quantidades do problema. O seu erro decorre da limitação em operar aritmeticamente, ou seja, diminuir as quantidades nos dois membros.

O gráfico 1 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos, por questão.

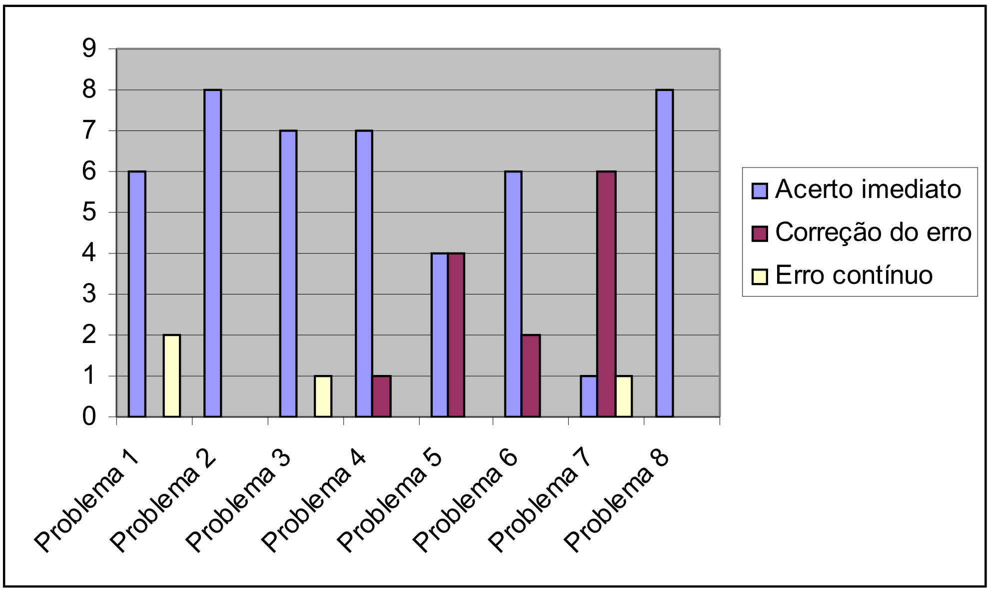


Gráfico 1 – Desempenho dos alunos, por questão.

Por meio do gráfico, percebemos que os alunos tiveram ótimo desempenho ao longo das atividades. No primeiro problema, dois tiveram dificuldades e não conseguiram corrigir seus erros, mesmo com nossas refutações. Os outros seis acertaram de imediato a questão. No segundo problema, nenhum aluno errou o problema, mas isso não significa dizer que não tiveram dificuldades (ver tópico análise das dificuldades). Somente um errou o terceiro problema. No quarto, também identificamos boa quantidade de acertos, contando que um aluno corrigiu seu erro. A partir da quinta questão, os problemas não possuem número e os alunos precisam usar outra lógica que é se aproximar mais do pensamento algébrico para resolver os problemas propostos. Observamos, então, o acréscimo da categoria correção do erro. Ao corrigir e superar esse erro inicial, o aluno pensa sobre a lógica que utilizou para resolver o problema e supera dificuldades iniciais. Além disso, reflete sobre as relações existentes na situação.

Apesar de esses problemas trabalharem com lógica de relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, e de serem diferentes dos problemas vistos em sala de aula, ele apresentou um bom desempenho, acertando a maioria das questões. Esses resultados também são encontrados nos estudos de Schiliemann, Carraher, Pendexter e Brizuela (1998), os quais mostram que dos 143 alunos que, resolveram os problemas, 94,4% deles acertaram.

No tópico seguinte, faremos a categorização das estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as situações-problemas.

4.2.1.2 *Estratégia de resolução*

<u>Cálculo mental</u>

Essa estratégia foi utilizada quando o aluno calculou mentalmente os problemas, explicando-os oralmente. Apesar de alguns terem dificuldade de verbalizar o pensamento, essa estratégia foi a mais utilizada pelos sujeitos. Vanessa, do 3º. Ano, leu o problema e ia resolvendo durante a própria leitura, utilizando o cálculo mental:

A: [a aluna começa a ler o problema] João e Sara estão brincando de bolas de gudes. João pegou 4 bolas de gudes do seu bolso esquerdo para brincar. João pegou então mais 4 bolas de gudes do seu bolso direito para brincar. João ficou com 8. Sara levou 8 bolas de gudes da sua coleção para brincar. Durante o jogo, Sara ganhou mais 2 bolas de gudes. João também ganhou 2 bolas de gude durante o jogo. Você acha que João tem a mesma quantidade de bolas de gude da Sara? Ou você acha que um tem mais bolas de gudes que outro? Cada um ficou com dez.
E: Por quê?
A: Se ele pegou quatro do bolso direito e 4 do bolso esquerdo, ficou com oito. Com mais duas que ele ganhou oito, nove, dez. Aí a Sarah levou oito, com mais duas que ela ganhou ficou com dez.

Percebemos que a aluna, durante a leitura do problema, já fazia mentalmente os cálculos, do total de bolas de gude tanto da parte do João como da Sarah, diminuindo também essas partes, dando uma relação final.

Com os problemas que não tinham números, também observamos a utilização dessa estratégia.

A: [a aluna começa a ler o problema]. Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Claudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Claudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Claudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra? Se a Rosa colocou seus selos em um álbum e Claudia em dois álbuns, eu acho que a Claudia tem mais que a Rosa.

E: Será que quando a gente tem dois álbuns tem mais figurinhas?

A: Ham ram [dizendo que sim].

E: Mas aqui no problema não tem dizendo que elas tinham a mesma quantidade de selos.

A: Os dois álbuns, sabendo dividir, fica a mesma quantidade.

E: Como assim?

A: Sabendo dividir, pode ter dez aqui e dez aqui.

E: Mas se eu tenho um álbum eu tenho menos figurinha de quem tem dois álbuns?

A: Pode [fica pensando].

E: Mas e ai? Nesse problema aqui, elas tem a mesma quantidade ou quantidade diferente?

A: Não importa a quantidade de álbum eu acho que ela dividiu os seus selos em um álbum e a Rosa colocou todos em um álbum.

Inicialmente, ao ler o problema, a aluna se enganou, dizendo que Cláudia tinha mais por ter dois álbuns. De acordo com nossas observações, ela entendeu a relação do problema e confirmou sua idéia, dizendo que não importa a quantidade de álbuns, pois Claudia “dividiu” o total de selos em dois e Rosa colocou “todos” em somente um álbum. Quando a aluna disee que Cláudia “dividiu” seus selos para colocar em dois álbuns, e Rosa colocou “todos” seus selos em um álbum, ela estava usando um esquema de pensamento que é traduzido da seguinte forma:

$$x = y1+y2$$

$$x\ (+z) = y1+y2\ (+z)$$

Segundo a aluna, a quantidade de selos de Cláudia (y1 + y2) é igual à de Rosa (x); mesmo que tenha dividido em dois álbuns, continua igual, pois receberam a mesma quantidade de selos.

O aluno Marcos (3º. ano) também utilizou essa estratégia na segunda questão, sem dificuldade.

E: Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes como Bárbara?
A: Não.
E: Por quê?
A: [coloca o número treze no papel]
E: Treze o que?
A: É porque ela ganhou sete presentes ai aqui ela ganhou três.
E: Certo. E a Joana?
A: Dez.
E: E ai? Elas têm quantidade igual ou diferente?
A: Diferente.
E: Por quê?
A: Porque uma tem dez e a outra treze.
E: Então quem ganhou mais?
A: A Bárbara.

Na seqüência, mostraremos outro exemplo de cálculo mental, quando o aluno resolveu os problemas que não possui números.

A: [o aluno começa a ler o problema]. Em um fim de semana Lucas e Francisco foram pescar. No sábado eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do que outro? O Lucas pescou mais.
E: Por que o Lucas pescou mais?
A: Por que eles descobriram que Lucas pescou mais que Francisco.
E: Mas, no sábado, eles pescaram a mesma quantidade.
A: É, mas no domingo o Lucas pescou mais.

Embora a resolução seja simples e esteja escrito no problema o fato de que no domingo Lucas pescou mais do que Francisco, consideramos que ele favorece o pensamento do aluno em estabelecer relações de igualdade e/ou desigualdade. Sendo assim, o problema leva a perceber que, quando adicionamos quantidades diferentes nas partes de uma relação, não teremos uma igualdade.

A aluna Tatiana errou no começo da resolução do sexto problema, mas fez uma depuração do seu erro, utilizando o cálculo mental.

E: Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em uma cesta. Marcelo dividiu seus biscoitos em duas cestas. Então, eles pegaram um outro pacote. Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um depósito para comer depois. O irmão mais nova de Carlos foi na cozinha foi na cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu pra ela sua cesta de biscoito e Marcelo deu pra ela uma de suas cestas de biscoito. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que os outro?

A: Tem a mesma quantidade.

E: Por quê?

A: Por que ele tem uma cesta... [pequena pausa]. Tem quantidade diferente!

E: Por quê?

A: Carlos... Ele deu uma cesta. O Marcelo deu outra.

E: Foi. Mas o Carlos tem quantas cestas?

A: Uma.

E: E o Marcelo?

A: Duas.

E: O Carlos deu o que pro irmão dele?

A: Um cesta.

E: E o Marcelo?

A: Uma

E: Mas e ai? Eles ficaram com a mesma quantidade de biscoito?

A: Não.

E: Por quê?

A: Por que o Carlos deu a cesta dele e ficou com nenhum e o Marcelo ficou com uma cesta e um depósito.

E: Por que ele ficou com uma cesta?

A: Porque ele não deu a outra.

E: Ah! E ele tinha duas?

A: Era.

Interessante é perceber que a aluna faz distinção entre o valor da incógnita e o número de incógnitas. Nesse caso, a incógnita seria cestas (x ou y). A aluna compreendeu que o total de incógnitas não é fator determinante para sua diferenciação.

Icônica

Estratégia utilizada quando o aluno faz desenhos, símbolos ou ícones para resolver os problemas; como, por exemplo, mostramos a resolução da aluna Tatiana para o terceiro problema:

E: Patrícia e Daniel estão brincando fora da vizinhança. Como os dois gostam de laranja, foram nas suas casas pegar laranja. Patrícia pegou 6 laranjas e Daniel pegou 3. Depois eles voltaram para suas casas pegar mais laranja. Patrícia pegou mais 4 laranjas e Daniel pegou mais 3. Daniel voltou pela terceira vez na sua casa e retornou com mais 4 laranjas. Nessa hora chegou um amigo deles e Patrícia deu para esse amigo 6 laranjas e Daniel deu 3 laranjas. Você acha que, agora, depois de eles terem dado algumas laranjas Patrícia e Daniel tem a mesma quantidade de laranjas? Ou você acha que um tem mais laranja que outro?

A: Diferente.

E: Por quê?

A: Porque Patrícia pegou 6 e Daniel 3.

E: Mas depois eles voltaram. Patrícia pegou quantas?

A: Quatro.

E: E Daniel pegou?

A: Três.

E: A Patrícia ficou com quantas laranjas?

A: Calada. [Parece muito tímida]

E: Tu quer fazer no papel ou quer fazer nos dedos?

A: [Desenha as laranjas da Patrícia]. A Patrícia ficou com dez.

E: E o Daniel?

A: [Desenha as laranjas do Daniel]

A: Daniel ficou com sete. [A aluna erra a quantidade]

E: Vamos ver. Primeiro ele pegou três. Depois eles voltaram para pegar mais laranjas. Patrícia pegou mais quatro e Daniel pegou mais três e depois Daniel voltou pela terceira vez e pegou mais...?

A: Quatro.

E: Tu contou com essas três?

A: Não... eu errei.

E: Depois que ele foi lá, ele pegou mais...

A: Quatro.

E: Tu vai apagar essas?

A: Não.

E: Tu vai desenhar mais quantas laranjas?

A: Três. [desenha as laranjas] Ele ficou com dez.

E: E a Patrícia?

A: Ficou com dez.

E: Mas depois chegou um amigo deles. A Patrícia deu quantas laranjas?

A: Seis.

E: E o Daniel?

A: Três.

E: Mas e aí... Se Patrícia deu seis laranjas, ela ficou com quantas?

A: [Conta as laranjas] Ficou com quatro.

E: E o Daniel ficou com quantas?

A: Ficou com seis. [responde rápido]

E: Conta de novo.

A: Com sete.

E: Então ela ficou com quantas laranjas?

A: Com quatro.

E: E Daniel?

A: Com sete.

E: Quem ficou com mais laranjas?

A: Daniel.

Durante a resolução desses problemas, a aluna acertou, dizendo que tem quantidade diferente, mas ela não diz quem tem mais e se refere à primeira parte do problema, justificando que: *Patrícia pegou seis e Daniel três*. Então, perguntamos com quantas laranjas a Patrícia ficou. A aluna demorou a responder e colocou as mãos de baixo da mesa para somar. Dissemos que podia calcular para que a aluna se sentisse mais à vontade. Ela começou a desenhar as laranjas de Patrícia e, logo após, desenhou as de Daniel. Quando ela foi perguntada sobre as laranjas distribuídas, não apagou nem riscou as laranjas, mas cobriu-as com o dedo e contou a restantes. Então, além de desenhar para ajudar na resolução do problema, poderíamos identificar uma estratégia motora, já que a aluna usa dedos para somar e diminuir laranjas. A seguir, as laranjas desenhadas pelaaluna.

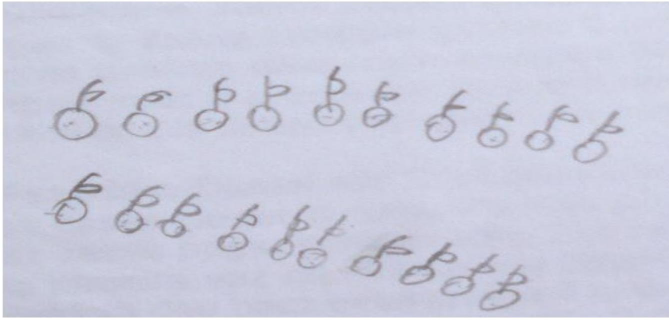


Figura 7 – Desenho da aluna Tatiana.

A aluna Amanda, do 5º. ano, ao resolver o segundo problema, montou o cálculo, mas resolveu por desenhos, utilizando bolinhas para representar os presentes da Bárbara e da Joana.

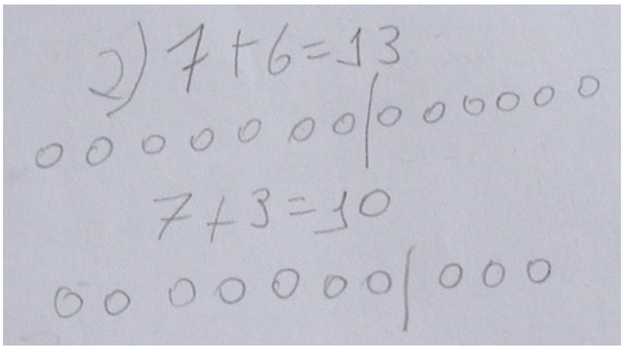


Figura 8 – Desenho da aluna Amanda.

Neste caso, a aluna primeiramente escreveu a representação numérica, mas desenhou as bolinhas para poder chegar ao resultado.

Ela mesma, ao resolver o sétimo problema, tentou desenhar a quantidade de álbuns e expressar um valor numérico ao problema. Nesse caso, tanto Rosa como Cláudia tinham a mesma quantidade de selos, mas Cláudia colocou em dois álbuns, e Rosa em apenas um. Observamos com a aluna desenhou.

<u>Numérica</u>

Essa estratégia é empregada, quando os alunos utilizam números para resolver os problemas. A aluna Ana, ao resolver a primeira, terceira e quarta questões, fez uso dessa estratégia, montando o algoritmo da soma e, logo após, da subtração, sem dificuldades.

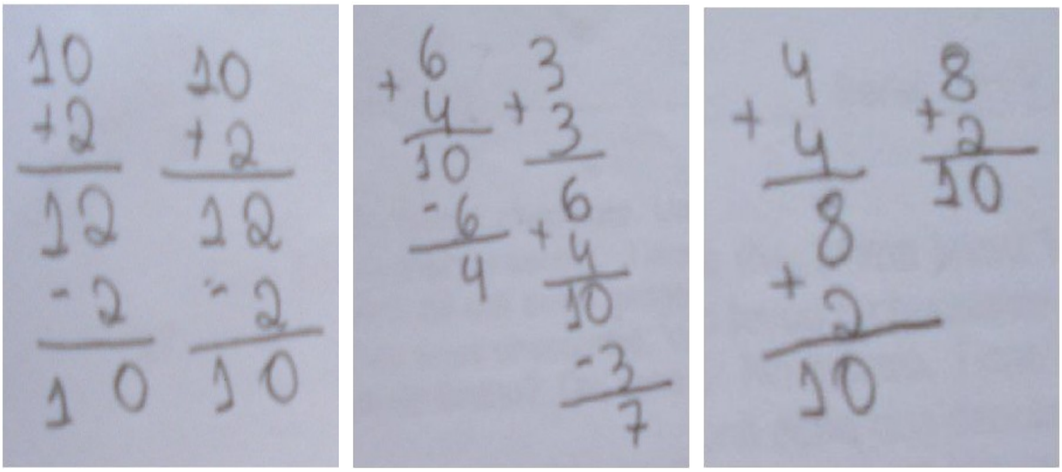


Figura 9 – Resolução da primeira, terceira e quarta questões.

Ao resolver o primeiro problema, fez todos os procedimentos pedidos: primeiro somou dez chocolates com mais dois; do total, diminuiu dois, já que Bruno e Tiago comeram dois cada um. É interessante ressaltar que, apesar de o problema mostrar que Tiago levou cinco e depois comprou mais cinco, a aluna representou a quantidade total de chocolates do Tiago, colocando dez na representação.

Ao resolver o terceiro problema, ela também faz sucessivas adições e subtrações, representando as idas de Patrícia e Daniel para pegar as laranjas. Ao final de cada situação, mostrou que Patrícia ficou com quatro laranjas (cálculo do lado esquerdo) e Daniel com sete laranjas (cálculo do lado direito).

No quarto problema, a aluna utiliza o mesmo raciocínio, mostrando que a quantidades finais de João e Sara continuam iguais.

Apesar de resolver pelo método numérico, a aluna conseguiu fazer as relações explicitas no problema e estabelecer sua igualdade ou diferença.

Nos problemas seguintes, ela apenas explicou verbalmente. Uma análise sobre a quantidade de estratégias de resolução utilizadas pelos alunos e acerca do desempenho será mostrada posteriormente.

A aluna Carol (3º. ano) não usou um algoritmo, mas utilizou números para resolver a terceira e quarta questões.

Na terceira questão, na qual há os dados de Patrícia e Daniel, a aluna colocou dez para os dois para expressar a quantidade inicial. Depois colocou o três, porque Daniel deu três, ficando com sete. Patrícia deu seis, ficando com quatro. É interessante perceber que, mesmo a aluna não utilizando os sinais de mais e menos, conseguiu estabelecer relações entre as quantidades e resolver corretamente o problema.

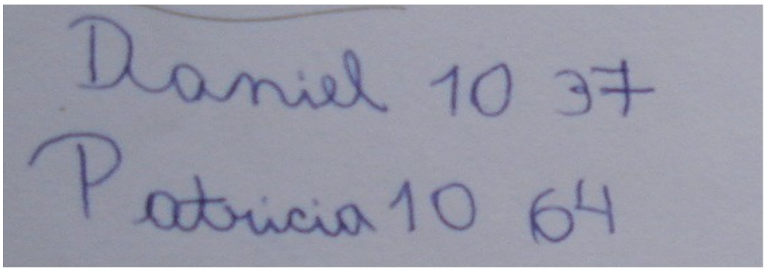


Figura 10 – Resolução da terceira questão da aluna Carol.

No problema seguinte, expressou a quantidade inicial de João e de Sara, depois, riscou essas quantidades para expressar a quantidade que cada um ganhou, colocando o número 10 para dar o resultado final.

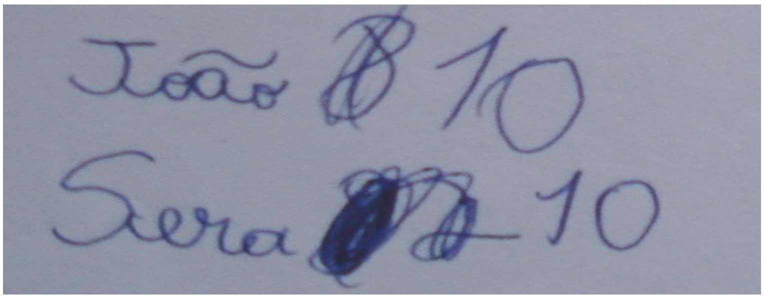


Figura 11 – Resolução da quarta questão da aluna Carol.

O gráfico 2 mostra a freqüência das estratégias utilizadas pelos alunos ao longo dessa atividade.

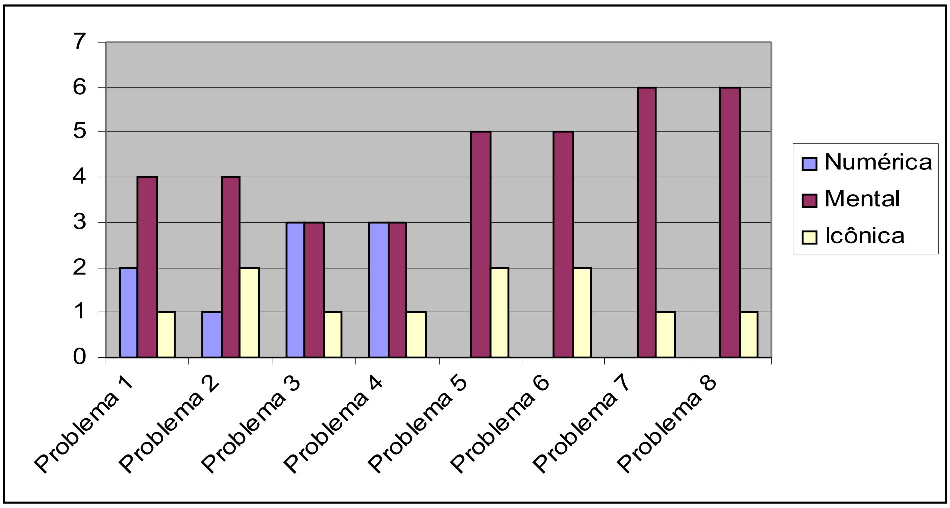


Gráfico 2 - Estratégia utilizada pelos alunos por problema

Por intermédio desse gráfico, podemos constatar que a estratégia icônica foi a menos utilizada ao longo dos exercícios. Esta foi utilizada uma vez em cada problema. Isso não significa dizer que foi utilizada por um mesmo aluno (a). A estratégia numérica foi empregada pelos alunos somente nas quatro primeiras questões. Podemos explicar esse dado pelo fato de esses problemas apresentarem números para resolver. Ela também foi a mais utilizada no terceiro e quarto problemas, porque esses problemas têm mais procedimentos numéricos do que os outros, ou seja, possuem mais números durante sua situação.

A estratégia mais utilizada foi o cálculo mental, principalmente nos últimos problemas. Como esses não possuem números, os alunos preferiram explicar seu raciocínio verbalmente. Podemos explicar esse fato em razão da própria estrutura do problema, que foge ao que os alunos estão acostumados a ver em sala de aula. Esse dado também foi encontrado nos estudos da Schliemann, Carraher, Pendexter e Brizuela (1998), pois, 79% dos alunos entrevistados preferiam explicar seu raciocínio verbalmente, não desenhando nem expressando a resposta por intermédio de números.

A estratégia icônica aparece com menor freqüência e é utilizada para ajudar no raciocínio e resolução da questão. A aluna Carol (3º. ano), para resolver a sexta questão, desenhou as cestas e os biscoitos de Carlos e Marcelo para ajudá-la durante o raciocínio, mas explicou oralmente o seu pensamento. Observemos na figura 12 a idéia de que, primeiramente, a aluna representou as duas cestas e o depósito de Marcelo; logo abaixo desenhou uma cesta e o depósito do Carlos. Como Marcelo e Carlos deram uma cesta de biscoito, ela viu que Marcelo ficou com mais, já que tinha duas cestas. Apesar de a aluna ter explicado verbalmente, classificamos essa estratégia de icônica.

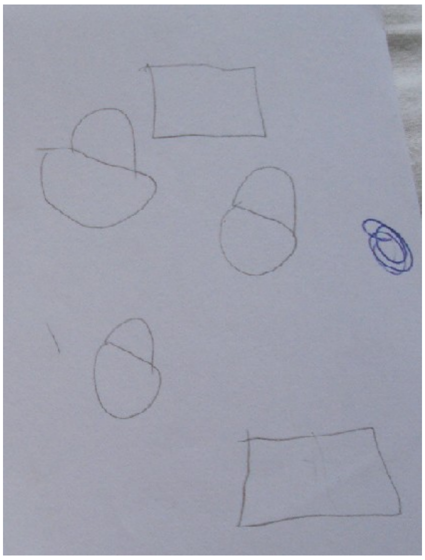


Figura 12 – Resolução da quinta questão da aluna Carol.

O aluno André (5º. ano) não desenhou, mas fez símbolos que se aproximam mais do conceito de incógnita. Observemos o que ele fez para resolver a mesma questão da aluna Carol.

Figura 13 – Resolução da quinta questão do aluno André.

Nesse caso, o aluno situou a representação do numeral um para representar as cestas. No começo do problema, colocou dois símbolos para Carlos e três para Marcelo. O aluno explicou que Carlos tem dois símbolos porque está com cesta e um depósito (um símbolo para cada um) e Marcelo tem três símbolos, porque possui duas cestas e um depósito. Como Carlos e Marcelo deram somente uma cesta, o aluno André apagou um símbolo de cada personagem. Observemos que, no desenho, podemos perceber que ele apagou. Ao final da questão, concluiu que Marcelo possui mais biscoitos, porque tem uma cesta e um depósito, e Carlos possui apenas um depósito. O aluno utilizou esse procedimento para resolver as questões que não possuem números explícitos.

O que eles escrevem ou desenham – é interessante notar – são informações que servem para guiar e registrar seus pensamentos. Esse tipo de exercício é ligado à atividade algébrica, uma vez que seu objetivo é modelar situações.

Segundo Schliemann, Carraher, Pendexter e Brizuela (1998), os alunos, nas quatro primeiras questões, escrevem a informação numérica para lembrar que devem somar e diminuir as quantidades. Nos problemas seguintes, como não há a informação numérica, eles utilizam o raciocínio, preferindo expor verbalmenteseu pensamento e defender a idéia de sua resposta.

Podemos concluir que os alunos sabem utilizar cálculos mentais e fazer inferência sobre relações mentalmente. Além disso, quando desenham ou utilizam ícones, estão utilizando representações que os ajudam a transcrever uma situação numérica ou desconhecida. É preciso que eles tenham mais contato com esses tipos de problemas e sejam estimulados a fazer comparações entre relações, o que não é muito comum no exercício aritmético.

Apesar do uso dessas estratégias, encontramos algumas dificuldades que serão discutidas a seguir.

4.2.1.3 *Dificuldades*

Manipular dados

Essa dificuldade foi registrada, quando o aluno sentia dificuldade em manipular os dados dos problemas, ou seja, durante a resolução, perdia-se no enunciado,precisando ler várias vezes os problemas para conseguir resolvê-lo.

No terceiro problema, observamos que a aluna Carol se confundiu durante a resolução do problema, apresentando uma dificuldade em manipular dados do problema. A transcrição seguinte ilustra a confusão da aluna:

A: Taqui 6, né? Patrícia 6 e aqui 3. Ai Patrícia 4. Seis mais quatro? Calcular, né? Seis mais quatro? Dez, né? Boto dez aqui. Dez, né? Ela [nesse caso já é Daniel] ganhou mais quatro laranjas, três mais quatro?

E: Você ta fazendo primeiro de qual?

A: Patrícia. Patrícia ganhou mais quanto? Ela ganhou mais seis laranjas. Ai ficou com quatro. Botar quatro aqui do lado posso? Ai... o Daniel, foi a terceira vez na sua casa. Ele tinha quatro mais três. Não! É seis mais quatro.

É fácil notar que a aluna se perde durante a manipulação dos dados, quando em uma hora calcula as laranjas de Patrícia misturando com as laranjas que Daniel ganhou.

A aluna Amanda, ao resolver o primeiro problema, sentiu dificuldade em relacionar as quantidades de chocolates.

E: Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Bruno levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tiago levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tiago comeu 2 de seus chocolates e Bruno comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa de que após o recreio Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que Bruno? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro?

A: O Bruno tem mais.

E: Por quê?

A: Porque lê tinha dois dez, comeu dois e no recreio ele deu dois pra amigo dele.

E: Onde tem dizendo que ele deu dois?

A: Ele ficou com dez.

E: E o Tiago?

A: Ficou com cinco.

E: Por que ele ficou com cinco?

A: Porque ele comeu um.

E: Como você sabe que ele comeu um?

A: Ele ficou com oito.

E: Por quê?

A: Porque ele tinha dez chocolates. Tiago tinha cinco chocolates, comprou mais cinco e ganhou mais dois, fica quatorze.

E: Quatorze por quê?

A: Porque, ô... um tinha dez, Tiago tinha cinco comprou mais cinco, ficou com dez. E o Bruno deu dois ai ficou com oito.

E: Mas ele não comprou dois?

A: Ah... ficou com dez.

E: E o Tiago?

A: Doze.

E: Por quê?

A: Ele comeu dois e ficou com dez.

E: E o Tiago tinha quantos chocolates antes de comer?

A: Doze.

E: E no final ficou com quantos?

A: Doze.

E: Mas ele não comeu chocolates?

A: Doze, na hora do recreio o amigo deu dois e não tinha cinco?

E: É mais ele levou mais cinco e depois ganhou mais dois. Quantos chocolates ele tinha?

A: Doze.

E: Comeu quantos?

A: Dois.

E: Ficou com quantos?

A: Dez.

E: Então os dois tem quantidades iguais ou diferentes?

A: quantidades diferentes.

E: Quem ficou com mais?

A: Foi o Bruno.

E: Ele ficou com quantos?

A: Com doze.

E: E ele comeu chocolate?

A: Dez.

E: E o Tiago ficou com quantos?

A: Doze.

E: Por que foi doze?

A: Foi dez, quantidade igual.

Mediante esse diálogo, podemos perceber que a aluna demorou muito para manipular os dados do problema. Sentimos também que ela teve dificuldade em somar (5 + 5 + 2) quando estava calculando mentalmente a quantidade de chocolates de Tiago, dizendo que eram quatorze. Essa dificuldade vai ser mais bem explorada no tópico seguinte.

Resolver algoritmos

Com relação à dificuldade de resolver algoritmo, observamos que a aluna Tatiana apresentou certas dificuldades em somar as partes do problema. Observemos o diálogo dela no segundo problema:

A: A Bárbara ganhou sete presentes e depois mais seis.

E: E a Joana?

A: Tinha sete presentes e ganhou mais três.

E: Aí quanto fica?

A: Calada.

E: Quanto que a Bárbara ficou de presente?

A: Ficou com dez.

E: Quem ficou com dez?

A: A Bárbara.
E: Mas ela tinha sete e ganhou mais seis, fica quanto?
A: [Contou nos dedos debaixo da mesma] nove.
E: E boto sete e tu bota seis.
A: Treze.
E: Treze! Então a Bárbara tinha quantos?
A: Treze.
E: E a Joana? Tinha sete presentes e ganhou quantos?
A: Três.
E: Quanto ela ficou?
A: Sete... [demora para responder] Não, 10!

O aluno André, ao resolver mentalmente o segundo problema, errou ao somar a quantidade de presentes da Bárbara.

E: Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes que Bárbara?
A: [Responde de imediato] Não!
E: Por quê?
A: Porque elas duas ganharam sete. Aí a outra, aí ela ganhou mais seis e a outra só ganhou três. Três com mais sete faz dez. Aí, agora com mais sete faz quatorze. Aí, dez com quatorze não podem igualar, né?
E: Sete com seis da quanto mesmo?
A: Pensa... Dá quatorze!
E: Eu acho que não...
A: Quatorze não, onze.
E: Conta direito. Pode fazer no papel.
A: Ah... treze.

Por essa transcrição, podemos notar que, apesar de errar a soma, o aluno entendeu a relação existente no problema, compreendendo que, apesar de terem a mesma quantidade inicialmente, ao final, ficaram com quantidades diferentes.

O gráfico 3 mostra as dificuldades encontradas pelos alunos em forma quantitativa.

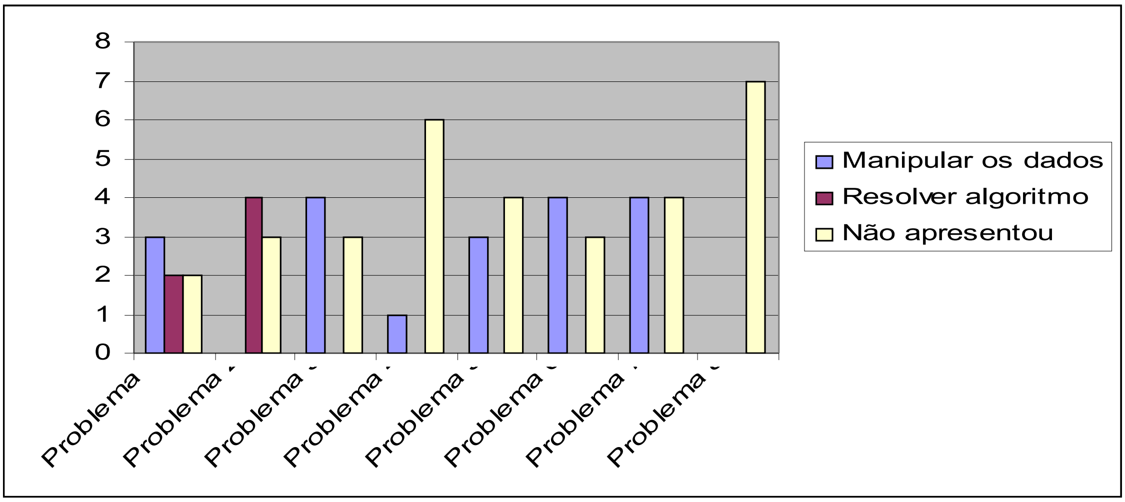


Gráfico 3 – Dificuldade categorizadas

Por meio desse gráfico, podemos constatar que a dificuldade dos alunos em manipular dados foi a mais identificada. Explicamos esse fato pela grande quantidade de relações existentes no problema, ou seja, para resolver os problemas, é preciso que os alunos estejam bastante concentrados. Os problemas contidos nessa atividade apresentam relações entre quantidade, e os estudantes devem diminuir ou aumentar as quantidades iniciais, para que, ao final do problema, digam quem tem mais ou menos. Geralmente, na escola, os alunos resolvem situações nas quais montar algoritmos é mais importante do que entender a relação entre quantidades. Iisso faz com que tenham dificuldades de entender situações-problemas.

Em contrapartida, a maioria dos alunos não apresentou dificuldades em entender o sentido relacional existente nos problemas. Entender e explicar a relação entre quantidades foi mais importante para os alunos do que apenas resolver da forma tradicional.

Esse dado nos mostra que é possível trabalhar com relações de igualdade e desigualdade e resolver situações para aprimorar o cálculo mental, as relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas.

Dados de outra pesquisa (LEITE, FREIRE, PASCHOAL, CABRAL e CASTRO FILHO, 2003), investigando as dificuldades dos alunos de 13 anos em Álgebra, apontam que alunos, mesmo em séries mais avanças nas quais já tiveram contato com a Álgebra, sentem dificuldade de resolver problemas algébricos, principalmente mediante procedimento numérico. Já os alunos desta pesquisa, como não conheciam o procedimento de montar equações, tiveram poucas dificuldades, pois resolviam de acordo com seu raciocínio. Trabalhar com os conhecimentos prévios e oferecer chances ao aluno de pensar sobre a situação-problema é a alternativa de solução para os problemas de aprendizagem que enfrentamos hoje.

4.2.2 Balança de dois pratos (medindo pesos)

Nessa atividade, utilizamos uma balança de dois pratos como aquelas empregadas em feiras para que os alunos aferissem alguns pesos confeccionados para tal fim. Durante essa atividade, categorizamos estratégias e apenas uma dificuldade. Não foi categorizado o desempenho, pois sempre os alunos eram levados a achar o valor final do peso.

4.2.2.1 Estratégia de resolução

Ao longo das atividades, categorizamos três estratégias que serão descritas a seguir:

Estratégia subtrativa

Como foi explicado na seção anterior, a estratégia subtrativa acontece quando o aluno usa a subtração para constatar que, ao acrescentar um peso em um prato da balança, é equivalente a subtrair o valor desse peso no outro prato da balança.

Durante essa atividade, observamos que, inicialmente as alunas precisavam de um auxílio nosso para entender a lógica desse pensamento, mas depois usam sozinhas. No recorte demonstramos o uso da estratégia subtrativa, com o nosso auxilio, na qual a aluna tenta descobrir o peso da um pote de granola, que equivale a 400 gramas:

E: Antes tu tinha botado quanto?

A: Trezentos e cinqüenta.

E: E era mais leve ou mais pesado?

A: Mais leve.

E: Então essa granola é mais pesada que 350 e mais leve que quanto?

A: Quinhentos

E: Qual o mais pesado aqui?

A: Esse [aponta para o prato onde tem quinhentas gramas].

E: E esse [prato da granola] é mais pesado ou mais leve?

A: Mais leve.

E: Se esse é mais leve e esse é mais pesado, onde a gente tem que botar peso? Desse lado [prato da granola] ou desse lado [prato das quinhentas gramas]?

A: Desse lado [aponta para granola].

E: Então vamos botar peso aqui?

A: [coloca 50] Não deu certo. [Coloca 100] Deu.

Ao final da atividade, a aluna compreendeu que, colocando peso no prato da granola, pode igualar os pratos da balança. No decorrer da atividade, descobriu que a granola vale 400, pois a granola mais o peso de cem gramas teria de ser igual a quinhentos. Sendo assim, teve de descobrir qual o peso que, somando a cem, dará igual a quinhentos.

Já a aluna Carol utilizou a estratégia sem a nossa ajuda. Observemos:

A: [Coloca um quilo na balança e a garrafa de coca cola].

E: Por quê você colocou um quilo?

A: Porque eu achei que fosse.

E: A garrafa é maior ou menor que um quilo?

A: Menor.

E: A garrafa é mais leve ou mais pesada?

A: Mais leve. [aluna tira o peso de um quilo e coloca o peso de seiscentas gramas, depois oitocentas gramas até chegar oitocentos e cinqüenta].

E: E agora? A garrafa é mais leve ou mais pesada que 850?

A: Mais leve

E: Qual peso ela pode ser?

A: 995!

E: E como é que a gente testa esse peso?

A: [Depois a aluna tira o peso oitocentos e cinqüenta e coloca um quilo de um lado e cem gramas do outro lado].

E: Por que você colocou cem aqui?

A: Pra ver se dava. Eu acho que aqui tem 900 gramas [que a aluna estimou para ser a garrafa] com mais cem [gramas] fica esse peso aqui [um quilo].

Nesse recorte, observamos que a aluna, além de não ter dificuldade em fazer a relação dos pesos na balança, elabora um raciocínio muitas vezes usado no ensino da Álgebra, que é passar os números para o segundo membro da equação, trocando o seu sinal. Por exemplo, aprendemos que é necessário isolar a incógnita no primeiro lado da equação e passar os números para o outro lado para achar o resultado. Na seqüência, mostramos a forma de resolução ensinada nas escolas:

$x + 100 = 1000$

$x = 1000 - 100$ [pela regra, o número deve trocar de sinal quando passa para o outro lado da equação].

$x = 900$.

Diferentemente dessa proposta, a aluna, ao realizar essa atividade, elaborou um raciocínio para compreender que, tirando um valor de um dos lados da equação (neste caso, da balança), terá de tirar esse mesmo valor no outro lado da balança. Pressupomos que essa atividade conduz à elaboração de um pensamento e entendimento da reflexão algébrica.

O aluno André também utiliza a estratégia subtrativa sem o nosso auxílio ao tentar descobrir o peso da granola.

A: [coloca o vidro de granola e do outro lado o peso de quinhentas gramas] A de quinhentas é mais pesada.
E: Certo.
A: [tira a da quinhentas e coloca duzentas gramas].
E: A de duzentas ficou o que?
A: Mais leve. Trezentos, trezentos e cinqüenta [fala ao tentar esses pesos]. Então vou tentar de novo [coloca o peso de quinhentas gramas e coloca o peso de 50 gramas no outro lado da balança]. Ainda não deu certo.
E: E então com a gente faz?
A: Quinhentos... [tira o peso de cinqüenta gramas e coloca o peso de cem gramas]. Igualou!
E: Quanto vale a granola então?
A: A granola vale quatrocentos.
E: Por que quatrocentos?
A: Por que eu botei cem, aí ficou quinhentos.
E: Então aqui tem cem [aponta para o peso ao lado da granola].
A: Mais quatrocentos.
E: E quanto é cem mais quatrocentos?
A: Quinhentos.
E: E nesse lado têm quantos? [aponta para o lado onde tem o peso de quinhentas gramas].
A: Quinhentos.

É simples notar que o aluno usou essa estratégia espontaneamente, colocando primeiramente o peso de cinqüenta gramas do lado oposto à granola, criando uma hipótese sobre o valor do peso. Como não deu certo, aumentou o valor do peso, testando a hipótese de a granola poderia ter um valor menor.

Análise do intervalo

Ao utilizar essa estratégia, os alunos descobriam primeiramente um intervalo possível. Então, se um peso é maior do que 200 gramas e menor do que 400 gramas, é porque o peso desconhecido pode ser 250, 300 ou 350.

Para descobrir o valor da garrafa de um soro que pesa trezentos gramas, a aluna Carol analisou os pesos já registrados para descobrir o valor do peso desconhecido. Notemos:

A: [aluna começa colocando cem gramas]. Cem gramas, o soro é mais pesado. [Depois coloca quinhentas gramas]. Quinhentas gramas é mais pesado. Pode ser trezentos e cinqüenta [aluna coloca cem e mais duzentos]. É trezentos!

E: Por quê?

A: Porque o quinhentos era mais pesado e o cem [gramas] era mais leve, se eu boto o menor [duzentas gramas], com um menorzinho [cem gramas] vai dar o resultado.

Observa-se que esse tipo de atividade e raciocínio trabalha com o conceito de incógnita, podendo ajudar no entendimento desse conceito nas séries seguintes.

A aluna Vanessa também analisou os pesos testados para descobrir o valor dos saquinhos:

A: [coloca os três saquinhos e o peso duzentos]

E: E ai? O duzentos é mais leve ou mais pesado?

A: Mais pesado.

E: Então ele é maior ou menor que esse aqui? [aponta para os saquinhos].

A: Tem que ir pra baixo [refere-se que tem que diminuir o valor].

E: E agora?

A: [tira o peso duzentos e coloca 100]. Deu menor. [acrescenta na balança o peso de cinqüenta gramas].

E: E ai?

A: Cento e cinqüenta.

E: E aqui?

A: Cento e cinqüenta.

E: Se aqui tem três saquinhos e pesa cento e cinqüenta, quanto pesa só um saquinho?

A: [pensando].

E: Dá pra saber?

A: Cinqüenta.

E: Por quê?

A: É assim, esse cinqüenta, cem e cento e cinqüenta.

Primeiramente, ela pôs o peso de duzentos gramas para testar sua hipótese inicial sobre o valor de peso. Depois, baixou o valor do peso, testando o peso cem. Como duzentos gramas eram mais pesados e os cem gramas eram mais leves, faltava a aluna testar o valor cento e cinqüenta. Esse tipo de estratégia facilita a descoberta do valor, já que este pode estar dentro de um intervalo especificado.

O aluno Marcos também usou essa estratégia. Observemo-lo, tentando achar o peso de uma garrafa que vale quatrocentos e cinqüenta.

A: A garrafa é mais pesada que trezentos e cinqüenta [tira trezentos e cinqüenta e coloca quinhentos].

E: Ele é mais leve ou mais pesado que quinhentos?

A: Mais leve.

Com essa analise, a garrafa poderia ser quatrocentos ou quatrocentos e cinqüenta, já que é mais pesada do que trezentos e cinqüenta e mais leve do que quinhentos. Para isso, o aluno utiliza a estratégia subtrativa para tentar achar o peso dentro do intervalo descoberto. O aluno situou no mesmo lado do peso de quinhentos gramas o peso duzentos gramas, percebendo que esse prato da balança ficou mais pesado, tirou os duzentos e colocou os cem, depois os cinqüenta, estabelecendo, assim, uma relação de igualdade.

Estimativa

Estratégia utilizada quando o aluno põe na balança o peso aproximado do valor que ele representa, aumentando ou diminuindo de forma gradativa. Nesse caso, o aluno procurou estimar o peso antes de pôr na balança. Por exemplo, se achar que o peso pode valer aproximadamente 200 gramas, situa esse valor na balança de dois pratos.

Essa estratégia foi bastante utilizada, pois os alunos, nessa atividade, tinham contato com os pesos, podendo pegar, pesar com as mãos e fazer uma estimativa de quanto ele podia pesar. Consideramos essa atividade importante para o pensamento algébrico pelo fato de levar o aluno a fazer comparações entre os pesos.

A aluna Carol, para descobrir o valor de um vidro de xampu que pesa trezentos e cinqüenta, começou colocando o peso de quinhentos gramas. Depois, para descobrir o valor de uma garrafa que vale novecentos gramas, colocou o valor de um quilo. O mesmo aconteceu com Tatiana, que, apesar das dificuldades e fazer operações aritméticas, usou várias vezes a estimativa para começar a fazer suas comparações.

A estimativa foi bastante utilizada nessa atividade porque os alunos tinham como aproximar o valor na balança de dois pratos, pois podiam ver aproximadamente a relação no prato que estava quase equilibrado ou não podendo perceber se precisavam colocar um peso mais pesado ou um mais leve. Todos os alunos, ao mensurar um peso, colocavam na balança um prato aproximado do seu valor para descobrir logo quanto ele valia.

No gráfico 4, mostramos a freqüência das estratégias paracada problema.

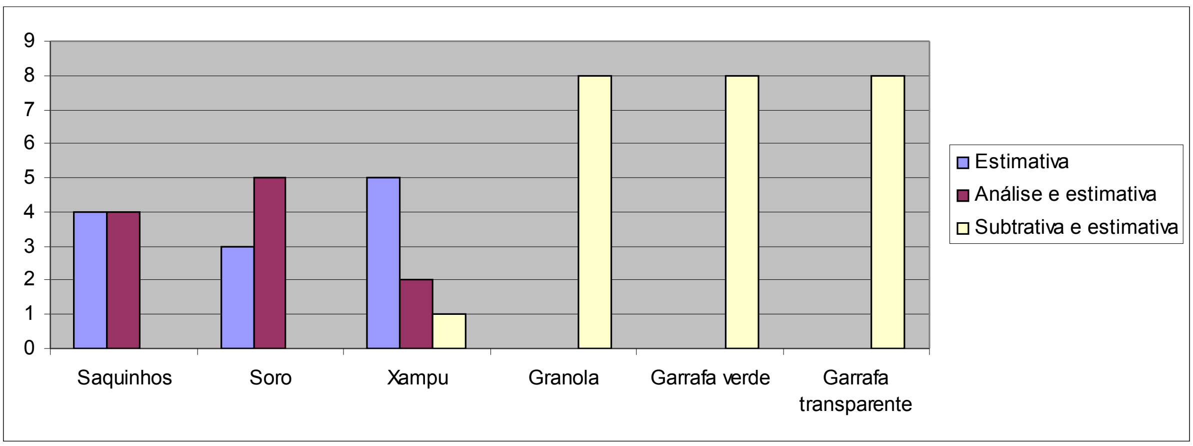


Gráfico 4 – Estratégia utilizada para descobrir o valor dos pesos.

A estimativa foi a estratégia mais utilizada para descobrir o valor dos pesos. A cada peso que o aluno iria descobrir, pesava com a mão para tentar estimar o valor do objeto a ser descoberto. Algumas vezes, utilizaram somente a estratégia estimativa e, outras vezes, combinavam estratégias para desvelar os valores dos objetos. Nos três primeiros pesos (saquinhos de farinha, soro e xampu), observamos a freqüência da utilização somente da estimativa. Como esses materiais podem ser descobertos, utilizando os pesos contidos na balança de dois pratos, os alunos, ao pegar nos pesos confeccionados, já estimam um valor aproximado, descobrindo rapidamente os pesos sem necessidade de utilizar outra estratégia.

Outras vezes, no entanto, esses mesmos pesos foram descobertos, fazendo uma análise do intervalo. Como esses pesos variam de cem a trezentos e cinqüenta gramas, os alunos sempre analisavam seus valores, colocando valores conhecidos como o de duzentos ou quinhentos. Diminuindo o intervalo, seria mais fácil encontrar logo o valor do peso pedido.

A estratégia subtrativa foi utilizada para descobrir os outros valores, pois era necessário utilizá-la para descobrir o valor do peso (ver explicação na página 38). Quando, porém, os alunos não conseguiam empregar a estratégia espontaneamente, fazíamos perguntas para ajudá-los a pensar sobre a possibilidade de colocar pesos no outro lado da balança para conseguir achar o valor. Perguntas do tipo: onde tem mais peso? Se tem mais peso aqui, a gente tem de tirar peso daqui ou daqui? Onde tenho que colocar peso para a balança ficar em equilibro?

Observa-se também que uma aluna utilizou a estratégia subtrativa para descobrir o valor do xampu, o que não era necessário, já que o xampu pesa trezentos e cinqüenta gramas. Ela, no entanto, durante a manipulação, utilizou o peso de quinhentos gramas de um lado da balança e o de cento e cinqüenta do outro lado, juntamente com o vidro de xampu.

Na tabela 1, mostramos a quantidade de vezes que essa estratégia foi utilizada, dividindo por idade e se o seu uso foi espontâneo ou não.

Terceiro ano		**Quinto ano**	
Uso espontâneo	Com ajuda	Uso espontâneo	Com ajuda
5	7	11	1

Tabela 1 – Análise do uso da estratégia subtrativa.

Diferenciamos os alunos, por ano, para analisar quais deles utilizaram a estratégia subtrativa espontaneamente ou não. Percebemos, ao longo das atividades, que, para que eles pudessem utilizar a estratégia subtrativa, precisamos ajudar sete vezes os alunos do terceiro ano. Estes empregaram cinco vezes a estratégia, espontaneamente. Já os do quinto ano, empregaram essa estratégia com mais facilidade, pois, somente um aluno precisou de ajuda para descobrir o valor da garrafa transparente.

Quando o aluno faz uso dessa estratégia, está procedendo a uma reflexão que se aproxima do pensamento algébrico, pois terá de pensar qual número (ou peso) pode acrescentar ao peso desconhecido para igualar a quantidade que está do outro lado da balança. Por exemplo, se o aluno colocou o peso cem juntamente com uma garrafa e igualou ao peso de um quilo, quer dizer que terá de achar o número que, acrescido ao cem, dará igual a um quilo. Esse tipo de pensamento ajudá-lo-á o aluno a compreender melhor o sentido de incógnita, e equação e trabalhar com relações entre quantidades.

Quando os alunos do quinto ano utilizam com maior freqüência essa estratégia, podemos inferir que houve desenvolvimento conceitual entre as crianças desses dois anos.

4.2.2.2 *Dificuldades*

Como foi explicado nas categorias de análise, registramos apenas uma dificuldade durante essa atividade.

Dificuldades na operação de soma e subtração.

A aluna, ao tentar descobrir o valor de uma garrafa de 900 gramas, conseguiu achar o equilíbrio, colocando o peso cem no mesmo prato onde estava a garrafa e quinhentos no outro prato, ficando a seguinte equação:

$100 + x = 1000$

Constatando que o aluno achou a igualdade, perguntamos:

E: Quanto deu?

A: Um quilo e cem, não, um quilo e cento e cinqüenta... [pensando]. Aqui deu... se aqui é um quilo [aponta pra um lado da balança], aqui é noventa e nove [aponta para o outro prato].

E: Será que noventa e nove mais cem dá um quilo?

A: Não... [pensando].

E: Quanto é cem mais cem?

A: Duzentos.

E: Cem mais duzentos?

A: Trezentos.

E: Cem mais trezentos?

A: Quatrocentos.

E: Cem mais quatrocentos?

A: Quinhentos.

E: Cem mais quinhentos?

A: Seiscentos.

E: E ai? Quanto é esse?

A: Ó, novecentos mais cem dá um quilo.

Para descobrir o peso de um xampu, o aluno tem dificuldade de somar os valores que existem no prato da balança.

E: Quanto é que tem aqui? [no prato tem duzentos e cem gramas].

A: Sei não.

E: Quanto é duzentos mais cem?

A: Duzentos e cem.

E: Não, duzentas gramas mais cem gramas, quanto é?

A: Não sei somar.

E: Sabe que eu já vi. Quando a gente tem cem, duzentos, depois do duzentos vem qual?

A: [calado].

E: Vamos contar de cem em cem.

Depois, fomos contando de cem em cem junto com o aluno até ele perceber que, acrescentando mais cem nos duzentos, vai dar igual a trezentos.

Analisando os alunos que tiveram mais dificuldade em utilizar a Aritmética, destacamos os alunos do terceiro ano. Enquanto eles apresentaram doze registros de dificuldade, os da quinta série apresentaram apenas cinco.

Dificuldades na Aritmética

Terceiro ano	Quinto ano
12	5

Tabela 2 – Análise das dificuldades registradas.

Podemos perceber que houve diminuição das dificuldades entre os anos. Esses dados nos mostram que os alunos superam suas dificuldades de somar e subtrair quantidades, demonstrando mais uma vez o desenvolvimento conceitual.

4.2.3 Balança Interativa

Atividade no computador que simula uma balança de dois pratos para achar o peso de caixinhas que possuem o mesmo formato, porém com pesos diferentes.

4.2.3.1 Desempenho

O objeto de aprendizagem utilizado apresenta um recurso que mostra o número de movimentos e, passo a passo, sua resolução. Esse recurso foi pensado para observar se os alunos estão criando estratégias de resolução ou apenas resolvendo os desafios propostos por ensaio e erro. Cada aluno resolveu duas vezes o objeto para que pudéssemos identificar melhor as estratégias utilizadas. Calculamos a média de movimentos da primeira e segunda resoluções da atividade. O gráfico 5 mostra a média do número de movimentos realizados pelos alunos do terceiro e do quinto anos.

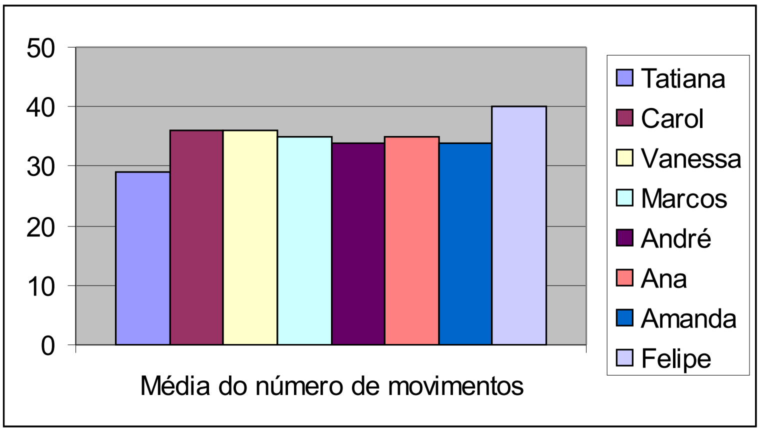


Gráfico 5 – Média do número de movimentos dos alunos do terceiro e quinto anos.

Os primeiros quatro alunos fazem parte do terceiro ano e o restante compõem o quinto ano. Mediante o gráfico, percebemos que não houve diferenças do número de movimentos entre os alunos do terceiro e do quinto anos. Fazendo uma comparação da média de movimentos com pesquisas anteriores, constatamos que alunos de séries mais avançadas realizaram o jogo com média de trinta movimentos (CASTRO FILHO, LEITE, FREIRE e PASCHOAL, 2003), enquanto os estudantes aqui analisados realizaram o jogo como a média de 35 movimentos.

Quando os alunos conseguem realizar o jogo com poucos movimentos, indica que estão desenvolvendo estratégia de resolução e não estão resolvendo por tentativa e erro. Esse dado nos leva a concluir que os alunos mais novos podem desenvolver estratégias, conseguindo uma quantidade de movimentos semelhante, quando comparados com alunos de séries mais avançadas.

4.2.3.2 Estratégias de resolução

Para essa atividade, categorizamos seis estratégias de resolução.

<u>Análise do intervalo</u>

Essa estratégia é bastante parecida com a tática empregada na balança de dois pratos, utilizada quando o aluno analisa o intervalo possível que um peso pode ter. Então, se um peso é maior do que dois e menor do que cinco, é porque o peso desconhecido pode estar dentro desse intervalo, ou seja, pode ser três ou quatro.

Quando os alunos analisam um intervalo de pesos, estão utilizando a estratégia. Por essa estratégia, pode-se descobrir um intervalo de números possíveis ou o número exato. Por exemplo, se o peso B for maior do que três e menor do que sete, temos os números quatro, cinco e seis como possibilidades para esse peso. Outra probabilidade do uso dessa estratégia é descobrir que um peso é menor do que três e maior do que um; nesse caso, já se pode saber qual o seu peso.

A aluna Tatiana, ao descobrir o peso A, usa a estratégia citada:

A: [coloca o peso A de um lado e o peso um do outro]

E: Se ele é maior do que um, qual peso ele pode ser?

A: Dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito nove e dez.

E: Tem um monte de peso pra gente ver, né? Será que tem um peso pra gente escolher que gaste menos movimento?

A: [fica pensando e escolhe o peso cinco].

E: Por que você escolheu o cinco?

A: Pra saber se é maior ou menor.

E: Qual número ele pode ser?

A: quatro, três, dois.

E: Qual você vai escolher?

A: O três.

E: Por que você acha que é três?

A: Por que eu quero ele.

E: Certo, mas antes de você colocar o três, me explica por que você quer ele?

A: Por que eu acho que dá [aluna coloca o peso três].

E: O que deu ai?

A: A A é mais pesado.

E: Então qual é?

A: Quatro.

Constatamos que a aluna analisou os pesos dentro de um intervalo possível. No âmbito das possibilidades – dois, três e quatro – a aluna colocou o peso três. Essa escolha demonstra que ela usou outra estratégia chamada busca pela metade, que será analisada mais à frente. Esse tipo de raciocínio nos demonstra que a aluna trabalha com o conceito de variável, testando suas hipóteses.

A aluna Vanessa, para descobrir o peso B, também usou a estratégia.

A: [coloca o peso B e o nove do outro lado].

E: O peso B é maior ou menor que nove?

A: Menor. [coloca o um]. Eu vou tirar o um. [coloca o sete].

E: Quanto tem agora?

A: Sete.

E: Quanto tinha antes?

A: Nove.

E: Era maior ou menor?

A: Menor.

E: E agora têm quantos?

A: Sete.

E: E é maior ou menor?

A: Maior.

E: Então pode ser qual?

A: O oito.

Apesar dela testar os pesos das extremidades, podemos notar que, depois de testar o número um, testa o número sete, dando o intervalo maior do que sete e menor do que nove. Com esse tipo de estratégia, o aluno pode diminuir os números de movimentos, criando, assim, uma maneira de reduzir movimentos.

Observar os números de movimentos nos ajuda a prever se os alunos estão criando estratégia de resolução, superando suas dificuldades iniciais ou apenas resolvendo o jogo por ensaio e erro.

Durante a segunda vez que resolveu as questões do jogo, a aluna, ao descobrir o peso A, usou a estratégia mais claramente:

A: Quatro é mais pesado que o A.

E: Porque você escolheu o quatro?

A: Por que eu tava achando que podia ser.

E: O A é mais leve ou mais pesado que quatro?

A: O A? É mais leve. [coloca o número dois].

E: E agora?

A: É mais pesado.

E: Se ele é mais pesado que dois, qual número ele pode ser?

A: O três.

E: Pode ser quatro?

A: Não.

Observemos agora a aluna Ana, ao tentar descobrir o peso B:

A: [coloca o número seis].

E: Tem alguma explicação de você ter colocado peso seis?

A: Não.

E: E o que deu ai?

A: O seis ficou maior. [a aluna quis dizer menor mas falou maior e coloca o número nove].

E: Por que você botou o nove?

A: Não sei. Deu menor que nove.

E: E antes deu o que?

A: Maior que seis.

E: Que número ele pode ser?

A: Ele pode ser sete ou então oito.Ele é maior que sete, então é oito.

Observação dos pesos registrados

Esta estratégia é utilizada quando o aluno observa os pesos que já saíram e o elimina dentro de suas possibilidades. Como exemplo, a aluna Carol, para descobrir o valor do peso D, coloca o peso quatro e descobre que o é mais leve. Sabemos que os números maiores do que quatro são cinco, seis, sete, oito, nove e dez, mas, dentro das possibilidades do jogo, o peso cinco e o peso seis já haviam saído. Observemos como a aluna identifica os pesos registrados:

E: O que deu ai?

A: O quatro é mais leve.

E: Qual número ele [o peso D] pode ser?

A: sete, oito, nove [os pesos cinco e seis já haviam sido registrado no jogo].

E: Você vai testar qual?

A: O sete.

E: Porque não pode ser o cinco ou o sei?

A: Porque eu já coloquei aqui.

Percebendo a álgebra como estudo dos procedimentos, podemos dizer que a aluna utiliza tal procedimento, ao verificar os pesos registrados durante o jogo.

Ao testar o peso E, a aluna também utilizou essa estratégia.

A: [coloca o peso E em um lado da balança e o número três do outro lado].

E: E ai?

A: O E é mais pesado. [coloca o número seis].

E: Ele pode ser o que?

A: Sete oito e nove. Ai! O nove já saiu. [testa o sete]. Agora ele é sete.

A aluna Vanessa observou os pesos que já saíram para descobrir o peso B:

E: Que número tu vai testar?

A: Pode ser cinco?

E: Pode...

A: [coloca o peso cinco].

E: Ele é maior ou menor que cinco?

A: Menor.

E: Quatro, três dois e um.

A: O dois pode ser de novo?

E: Não, quatro, três, um.

A: [escolhe três].

E: Porque tu escolheu o três e não o quatro?

A: Pra diminuir os movimentos.

E: E porque você acha que escolhendo o três diminui os movimentos?

A: Porque o três eu tava só vendo, porque ele ta aqui ó [aponta para onde o três está].

E: E porque você não escolheu o quatro?

A: Pra diminuir os movimentos, porque seu eu escolhesse o quatro ia ficar daquele mesmo jeito. Bota o quatro depois o três, aí é mais movimentos.

Observemos Carol:

E: Qual você vai escolher?

A: Cinco.

E: Porque depois do quatro é cinco.

A: O cinco é maior. Pode ser três.

E: Não é três. Pode ser qual?

A: O dois. O dois já saiu. É um.

E: Precisa tentar?

A: Não. Só pode ser um.

Busca pela metade

Essa estratégia consiste em encontrar cada peso, iniciando com a metade dos valores possíveis. Por exemplo, ao tentar descobrir o valor de qualquer peso, o aluno inicia com o número 5. Se o programa apresentar maior do que cinco, o peso desconhecido pode ser 6, 7, 8, 9 ou 10. Se for menor do que cinco, o peso pode ser 4, 3, 2 ou 1. Sendo o valor do peso igual a 5, o aluno encontrou a solução do problema. Essa estratégia permite ao aluno diminuir pela metade o valor do intervalo que o peso desconhecido pode ser. Consideramos também busca pela metade quando os alunos utilizam o quatro e o seis.

Nessa situação, a aluna Tatiana tenta achar o peso da letra E. Algumas vezes, para descobrir o valor das letras anteriores, também utilizou o cinco, mas teve dificuldades em dizer por que utilizava o cinco para achar os pesos. Vejamos:

E: Por que você vai testar o cinco?

A: Porque se for maior do que cinco vou testar só esses daqui.

E: E qual esse daqui?

A: Seis, sete, oito e dez [o nove já tinha saído].

E: E por que na maioria das vezes tu escolhe cinco?

A: Por que eu vejo se ele é maior ou menor.

Ao longo dessas atividades, a aluna escolhe, muitas vezes, o número cinco, mas não consegue expressar seu pensamento, dizendo que o número cinco elimina o maior número de pesos possíveis. Essa dificuldade de verbalização é mais típica da faixa etária dos sujeitos investigados. Embora a aluna não saiba explicar claramente seus movimentos, os resultados aqui encontrados se assemelham aos de estudos anteriores (FREIRE e CASTRO-FILHO, 2006).

Já a aluna Carol aproxima-se bem mais de uma explicação coerente, ao tentar descobrir o valor do peso B. Observemos:

E: Porque você vai pegar o seis?

A: Por que é um numero maior.

E: Mas o nove também não é maior?

A: É! Mas eu gasto menos coisa.

E: Porque você acha que pegando o seis gasta menos movimento?

A: Por que o seis é um número menor.

E: Mas você não disse que era maior?

A: É mais ele ta aqui no meio.

A aluna Ana, depois de utilizar muito a seqüência de pesos e uso das extremidades, colocando o número um ou o nove, começa a colocar um peso intermediário.

A: [coloca o peso A e o número cinco].

E: Por que você colocou o cinco?

A: Porque se eu colocasse o um ia ter nove pesos pra eu colocar. Ai quanto mais peso eu botasse mais movimento eu ia fazer. Ai eu botei o cinco para ver se dava. Ai eu coloquei o sei e ficou igual.

O aluno André sempre escolhia o cinco para testar a relação entre os pesos, no entanto tinha dificuldades em explicar por que sempre escolhia o número cinco.

A: [coloca o peso C e o número cinco].
E: Porque o cinco?
A: Não tem o porquê.
E: E porque você começou pelo cinco e agora de novo.
A: E porque eu to tentando ele pra ver se ele dá.

A aluna Carol, ao descobrir o peso B, usa bem essa estratégia.

A: [coloca o peso B e o número 1].
E: Se você testar o um, vai poder ser quantos números.
A: Esse tudinho, até o nove.
E: E o dez também. Será que tem um jeito de a gente gastar menos movimento?
A: [coloca o seis].
E: Porque você quis colocar o seis?
A: Porque é um número maior.
E: Mas o nove também não é maior?
A: É! Mas eu quero gastar menos coisa.
E: Porque você acha que pegando o seis gasta menos movimento?
A: Porque seis é um número menor.
E: Você não disse que era maior?
A: É, mas ele tá aqui no meio.

Intercala pesos

Essa estratégia aparece quando o aluno inicialmente pesa os valores conhecidos por meio de uma seqüência para achar o desconhecido. Usando essa seqüência, podemos inferir que a aluna não está utilizando nenhuma estratégia de resolução e sim descobrindo o valor por da tentativa e erro. Como já foi expresso na seção anterior, categorizamos esse tipo de situação como o uso de seqüência de pesos, demonstrando, assim, a dificuldade da aluna.

No recorte seguinte, ela tenta achar o peso F, diminuindo o valor possível do nove, até o quatro; a balança sempre mostrava que o peso F era menor. Quando chegou ao valor quatro, a aluna pulou o peso três e testou o dois. A partir disso, ela percebeu que, intercalando os pesos, pode descobrir mais rápido o valor de um peso.

E: O que deu agora?

A: Maior que dois. Ele é três.

E: Por que é três?

A: Porque com quatro ele era menor e com dois, maior.

Quando a aluna intercalou peso, descobriu que, se ficar medindo de um em um, leva ao crescimento de números de movimentos, não descobrindo nenhuma forma de reduzir esse número como solicitado por nós.

A aluna Vanessa começou a intercalar o peso C. Antes disso, ela testava um a um para tentar descobrir os pesos.

A: [escolhe o peso quatro].

E: Ele é maior ou menor do que quatro?

A: Maior.

E: Se ele é maior do que quatro, que número ele pode ser?

A: cinco, seis, sete, nove e dez.

E: Qual vai escolher?

A: Seis.

E: Porque você não vai escolher o cinco?

A: Para diminuir os movimentos.

E: E o C é maior ou menor que seis?

A: Maior.

E: Se ele é maior do que seis, qual número ele pode ser?

A: Sete, nove e dez.

Para descobrir os pesos anteriores, ela testava uma seqüência de pesos. Agora, para desvelar o peso C, testou o número quatro e pulou para o seis, sem precisar testar o número cinco, como fazia de costume.

Uso de seqüência de peso

Essa estratégia foi categorizada quando o aluno tentou uma seqüência de peso para descobrir o valor desconhecido. Por exemplo, para descobrir o valor do peso B, colocou o peso

1 (um), logo depois o 2 (dois), em seguida o 3 (três) e assim sucessivamente até achar o valor correto do peso.

A aluna Ana, ao começar o jogo, utilizou a estratégia para tentar descobrir o peso A e o peso B.

A: [coloca o peso A e o número 1].
E: E ai? Qual é o mais pesado?
A: O um é mais pesado. [Depois testa o número dois, três, quatro, quando testa o número cinco e dá igual].Agora ficou igual a cinco.
E: E agora? Vai testar qual?
A: [tira o peso A e coloca o B]. O B é maior. [coloca o número nove]. Pronto, ele é nove.

Nesse momento, a aluna tirou o peso B e colocou o peso C. Percebendo que o peso C era menor do que nove, foi diminuindo de um em um até chegar ao número dois.

E: O que deu agora?
A: O C é menor que dois.
E: Qual número ele pode ser
A: O um.
E: Será que a gente precisa botar aqui pra gente ver que o C é um?
A: Não.

A aluna Carol, logo no começo do jogo, também usou uma seqüência de peso para tentar descobrir o peso A.

A: [escolhe o peso A e o número 1].
E: O A é maior ou menor que um?
A: Maior.
E: Qual número ele pode ser?
A: Dois.
E: Só o dois?
A: Não. Pode ser esses números tudinho. [a aluna vai testando um por um até chegar o número quatro.]
E: Tu vai testar um por um?
A: Vou colocar o nove.
E: E agora?
A: Deu menor que nove.

E: Então que número pode ser?

A: Sete.

E: Só o sete?

A: O seis também. O cinco, seis, sete, oito.

E: Por quê?

A: Porque são números maiores que quatro e menores que nove.

Uso de extremidades

Quando o aluno inicia a descoberta de um peso utilizando essa estratégia, quando começa o jogo pelo peso 1 (um) ou 9 (nove) para tentar descobrir cada novo peso. Em alguns momentos, a aluna Tatiana utilizou esse procedimento para achar o valor de um peso. Quando um aluno utiliza essa estratégia, demora a achar mais o valor do peso, pois, se o desconhecido for maior que um e menor que nove, ainda temos um intervalo grande para descobrir o seu valor. Observemos o exemplo:

E: Por que você colocou o nove?

A: Pra ver se dava igual

E: Por que você escolheu logo o nove?

A: Porque eu tenho esse jogo lá em casa [depois a aluna coloca o peso 2]

Observa-se, nesse recorte, que, além da dificuldade do uso de extremidades, a aluna também tem dificuldade de expressar seu pensamento, dando uma resposta sem nexo à nossa pergunta.

A aluna Vanessa tambémusou essa estratégia ao descobrir os pesos F e H.

A: [testa o número dois com o peso F]. Maior que dois.

E: Que número pode ser?

A: [não responde e coloca o número nove].

E: O que deu ai?

A: O nove é menor.

E: Se ele é menor do que nove que número ele pode ser?

A: Cinco.

Ao tentar descobrir o peso H, também empregou a mesma estratégia.

A: [coloca o peso nove e o peso H]. O H é menor do que nove.

E: Que número ele pode ser?

A: [não responde e coloca o número dois]. Menor que dois. Ele pode ser um.

E: Por quê?

A: Porque ele é menor do que dois. E o dois deu maior do que o H, então ele deu menos pesado, então ele pode ser um.

A aluna Carol sempre escolheu o número um ou o dois para descobrir os pesos. Observemos a explicação que ela deu para usar essa estratégia.

A: [escolhe o peso A e o número dois].

E: Por que você escolheu o dois?

A: Porque eu quero ver do menor para o maior.

O gráfico 6 mostra a quantidade de estratégia utilizada pelos alunos do terceiro ano e quinto anos.

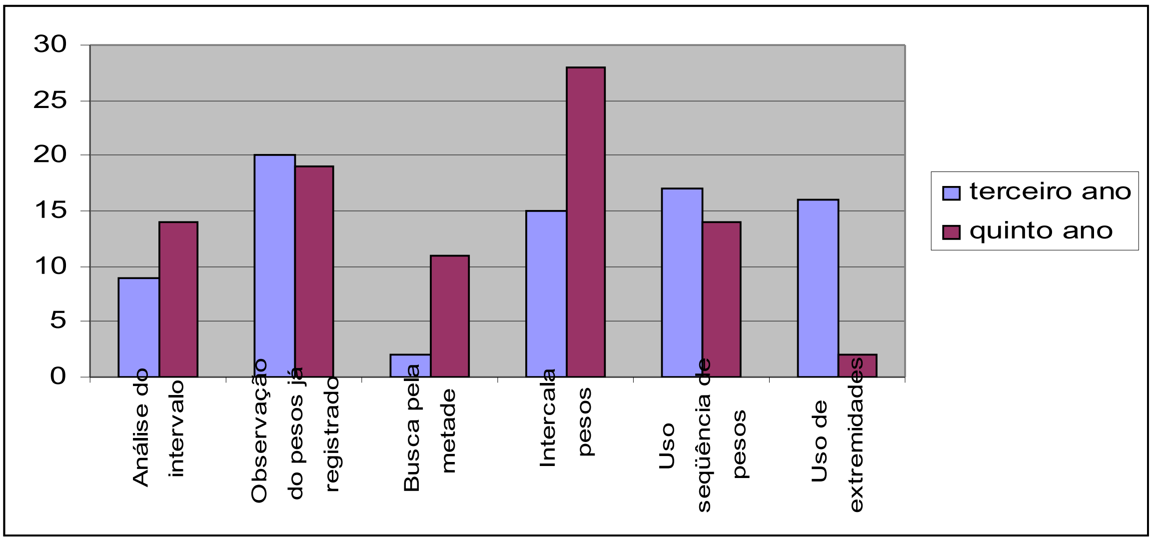


Gráfico 6 – Relação das estratégias utilizadas no terceiro e quinto anos.

As estratégias análise do intervalo, busca pela metade e intercalação de pesos foram mais utilizadas pelos alunos do quinto ano. As estratégias citadas são as que mais precisam utilizar do raciocínio lógico e são estratégias que diminuem mais os números de movimentos. Ao elaborar o raciocínio para analisar o intervalo de um peso, o aluno cria mais esquemas de representação mental do que apenas ao observar os pesos que já saíram durante o jogo. Quando utiliza o número cinco para eliminar a metade dos números possíveis (busca pela metade), o aluno raciocina mais do que apenas buscar o peso por meio de sua extremidade. Por fim, o aluno, durante a manipulação, descobre que intercalar pesos é bem mais eficaz e gasta menos movimentos do que usar uma seqüência de pesos.

Observamos, então, pelo do gráfico, que os alunos do quinto ano utilizam as estratégias mais refinadas (análise de intervalo, busca pela metade e intercala pesos) durante a manipulação do jogo.

Comparando esses dados com os de outra pesquisa (CASTRO FILHO, LEITE, FREIRE e PASCHOAL, 2003), podemos perceber que eles também desenvolvem as mesmas estratégias. Os do quinto ano se aproximam dos resultados desta pesquisa, quando utilizam estratégias mais refinadas.

Os dois grupos utilizaram quase o mesmo número de vezes a estratégia observação dos pesos registrados. Isso acontece porque essa estratégia é mais exigida e empregada ao final do jogo, quando a metade dos pesos já foi registrada e é possível eliminar os que já saíram para prever qual poderá ser descoberto. Sendo assim, quase todos os alunos a utilizaram para descobrir nos três últimos pesos restantes.

Os alunos do terceiro ciclo utilizaram mais as estratégias de uso de seqüência de pesos e uso de extremidades por sentirem mais dificuldades durante a atividade e terem dificuldades de elaborar estratégias de resolução.

4.2.3.3 Dificuldades

Além das estratégias, ainda categorizamos duas dificuldades.

<u>Verbalizar</u>

Muitas vezes, o aluno utilizava alguma estratégia, mas não sabia explicar por quê. Por exemplo, Carol utilizou várias vezes a estratégia busca pela metade, empregando o número cinco para eliminar a metade de números possíveis, mas não sabia explicar e utilizava explicações incoerentes. Observemos a aluna Carol, tentando descobrir os pesos C,D e F.

A: [escolhe o peso C].

E: Qual tu vai escolher?

A: Cinco

E: Por que o cinco?

A: Porque depois do quatro é o cinco. O cinco é maior.

[para descobrir o peso D]

A: [escolhe o peso D].

E: Por que tu tentou o seis?

A: Porque eu quis tentar.

[para descobrir o peso F]

A: [escolhe o cinco novamente].

E: Por que o cinco?

A: Porque eu gosto dele. Por que o cinco pode dar sete... e se eu escolher o cinco, pode dá oito.

E: Não entendi.

A: [fica calada, tira o número cinco e coloca o seis].

[para descobri o peso H]

A: [coloca o peso H e o número seis].

E: Por que tu colocou o seis?

A: Porque eu quis colocar ele.

Outras vezes os alunos não respondiam às perguntas da pesquisadora. Como mostra a transcrição do aluno Felipe.

A: [coloca o peso A o número sete e o um].

E: o que deu ai?

A: O A é mais pesado.

E: Se o A é mais pesado que oito qual número ele pode ser?

A: [coloca dez].

E: Qual número ele pode ser?

A: [calado].

E: Se ele é mais pesado que oito e mais leve que dez, qual o número ele pode ser?

A: [fica calado].

E: Qual peso é mais pesado que o oito?

A: Nove.

E: E ele é mais leve ou mais pesado do que dez?

A: Mais leve.

E: Qual o número mais leve que dez?

A: Nove.

E: E então? Qual número ele pode ser?

A: [depois de um tempo] Nove.

<u>Aritmética</u>

Essa dificuldade foi classificada quando os alunos apresentavam dificuldade em somar um número ao outro e em dizer os números maiores ou menores do que o classificado na balança.

Apresentamos a dificuldade de a aluna Tatiana, ao somar o número sete a um para dar oito.

A: [coloca sete]. Maior que sete. Pode ser oito, nove e dez.

E: Qual número eu coloco aqui pra dá oito?

A: Cinco.

E: Será que cinco mais sete é oito?

A: [calada].

E: Qual número eu completo com sete pra dar oito?

O aluno Marcos teve dificuldade em formar o número dez para descobrir o peso C.

E: O C vale quanto? É mais leve ou mais pesado que o seis.

A: Mais pesado [quer colocar o seis].

E: Você não tinha dito que o C era mais pesado que o seis.

A: Ai era.

E: E agora?

A: O C é mais pesado que o oito, mais pesado que o nove.

E: Então qual número ele pode ser?
A: [calado].
E: Depois do nove é qual?
A: Dez.
E: Qual número coloca para formar dez?
A: Um.
E: Sete mais um é quanto?
A: Oito.
E: Então não e dez.
A: Com mais dois.
E: Quanto é sete mais dois?
A: [Calado].

A aluna Vanessa apresentou, no começo do jogo, uma dificuldade em entender se colocaria um número maior ou menor na balança.

A: [coloca o peso B em um lado da balança e o nove do outro lado]. Tem que colocar um menor é? [o peso B é mais leve que o nove].
E: O que você acha? Ele é maior ou menor que nove?
A: [aluna não responde e coloca o peso quatro].

Ao tentar o peso C, não soube dizer qual o maior ou menor.

A: [coloca o peso C de um lado da balança e o número cinco do outro lado].
E: O que deu?
A: O cinco é maior.
E: Se ele é maior do que cinco, qual número ele pode ser?
A: Quatro.
E: Então um número maior que cinco pode ser quatro?
A: [calada].
E: Quais são os números maiores que cinco?
A: Não, não, ele pode ser seis, sete, oito, nove ou dez. Poder ser oito também... [coloca oito].
E: Deu o que agora?
A: Menor que oito.
E: Que número pode ser?
A: Seis ou sete.

Percebemos que a aluna demorou a entender a seqüência dos números ao descobrir os peso B e C. No peso B, a aluna teve dúvidas sobre a relação dos pesos e a dúvida se repetiu ao tentar descobrir o peso C, quando ela garante que um número maior do que cinco é quatro, no entanto, depois acertou, dizendo os números maiores do que cinco e ainda usou a estratégia análise de intervalo.

A aluna ainda demonstrou maisdificuldade:

E: O E é maior ou menor do que quatro?
A: Menor do que quatro.
E: Qual que ele pode ser?
A: Pode ser... [calada]. Pode ser seis.
E: Um número menor que quatro é seis?
A: É três, dois e um.
E: Então qual desse você vai tentar?
A: O três.

Nesse caso, a aluna demonstrou dificuldades em saber qual número é menor do que quatro.

O aluno Marcos também apresentou algumas dificuldades em entender o sentido relacional dos pesos.

A: [coloca o peso E e o número três, depois tira o três e coloca o oito].
E: Por que você tirou o três e colocou o oito?
A: [calado].
E: Por que você não colocou o quatro, o cinco ou o seis?
A: Sei não.
E: O oito é mais pesado que o E. Você escolheu o nove e ficou mais pesado ainda.
A: [aluno ficou calado, tirou o nove, colocou o sete, depois o seis, o cinco].
E: Você vai testar um por um é?
A: É. [tira o cinco e coloca o quatro, a balança demonstra equilíbrio.] Pronto.

Percebemos, nessa transcrição, que o aluno colocou o nove, pois teve dificuldade em entender que o peso E era mais leve que o oito. Compreendemos também que o aluno teve dificuldade de explicar seu pensamento quando fizemos as perguntas e ele ficou calado ou respondeu que não sabia. Nesta transcrição, o aluno utilizou a estratégia de seqüência de pesos, pois ficou tentando um a um até chegar o número quatro.

Comparando as estratégias com as dificuldades, notamos que os alunos criaram mais estratégias em vez de apresentar dificuldade. Analisando as fitas e as transcrições, os alunos do terceiro ano demonstraram maior dificuldade de explicar seu pensamento. Já do quinto ano conseguiam se expressar e explicar suas respostas com maior facilidade.

Nesse caso, não realizamos uma contagem de dificuldades, pois a maioria delas já está descrita no tópico anterior e, na maioria das vezes, não houve nenhuma dificuldade. Algumas vezes achavam o peso logo na primeira tentativa, noutras ocasiões deixávamos os alunos explorarem, sem ficar pedindo explicações a cada movimento e, na maioria das vezes, não demonstraram dificuldades em explicar ou resolver os desafios propostos.

Mostramos, a seguir, mostraremos as estratégias e o desempenho dos alunos, quando faziam uma atividade na balança de dois pratos.

4.2.4 Balança de dois pratos (comparando pesos)

Essa atividade simula uma balança de dois pratos na qual os alunos terão de comparar caixinhas confeccionadas para tal fim. Elas possuem o mesmo formato, porém pesos diferentes. Pedimos que os alunos classificassem do maior para o menor ou vice-versa.

4.2.4.1 Estratégias de resolução

<u>Estimativa</u>

Essa atividade foi realizada pelos alunos sem muitas dificuldades, e eles resolviam rapidamente, pois faziam hipóteses sobre os pesos, descobrindo rapidamente qual era o menor ou maior. Nós, no entanto, fazíamos refutações do tipo: como tu sabe que esse peso é o maior / menor de todos? Será que esse é realmente o maior / menor de todos?

A aluna Tatiana, antes de comparar os pesos na balança, sempre fazia comparações com a mão para depois testar os pesos na balança. Achando que o branco era mais leve, ela fica testando com as mãos, como se tivesse fazendo um pêndulo e dizia que o preto é o segundo mais leve, depois continuava a descobrir comparando com as mãos:

E: Qual será que é o mais leve o verde ou o preto?

A: O verde é mais pesado [coloca o pote preto ao lado do branco compara na balança o verde com o azul].

E: Por que tu colocou o azul?

A: Pra testar o peso.

Depois a aluna testa na balança o verde com o vermelho e o amarelo, percebendo assim que o verde era o mais leve do que os testados. Logo após, colocou o vermelho do lado do verde, sem fazer testes na balança:

E: Será que esse [pote vermelho] vai ficar aqui?

A: Vai.

E: Por quê?

A: Porque eu peguei aqui e o amarelo é mais pesado.

E: Por que amarelo ficou por último?

A: Porque é do menos para o maior [explicando a seqüência dos potes].

Percebe-se nesta transcrição que a aluna compara os pesos um a um para descobrir qual é o pote mais pesado dentro dos pesos que faltam descobrir.

<u>Comparação sistemática</u>

As estratégias dessa atividade podem ser usadas juntamente. A aluna Vanessa primeiramente pegou com a mão todos os pesos e escolheu a branca, para classificar como a mais leve.

E: Será que a branca é a mais leve que tudinho?

A: [compara na balança o pote branco com todos os outros potes um a um]. É a mais leve.

E: Como você faz pra saber se é a mais leve?

A: Ele é mais leve por que é sem nada dentro.

E: Mas aqui na balança como tu faz pra saber se é a mais leve?

A: Não sei, o azul é mais pesado.

E: Mas se fosse só vendo aqui na balança?

A: Quando ele ta aqui [aponta para o prato mais baixo], é por que esse é mais pesado e quando ta aqui [aponta para o prato mais alto], é mais leve.

O aluno André comparou os pesos sistematicamente, fazendo relações sobre o maior e menor. Ele começou pegando os pesos e escolheu a branca, explicando que as outras era “tudo grande”.

E: Por que essa é a mais leve?

A: Porque ó... [coloca na balança o peso branco com todos os pesos um a um mostrando que mais leve. Depois escolhe os potes vermelho e preto para ver qual é o mais leve].

E: Por que você não testou com o amarelo?

A: Porque só pegando dá pra ver [o aluno tira o pote preto coloca do lado do branco e testa agora, o vermelho com o verde. Vendo que o verde era o mais leve, testa ainda com o azul].

E: Por que você colocou o verde aqui?

A: Porque ele é o mais leve que o vermelho e o azul [coloca o vermelho com o azul].

E: E ai? Qual o mais leve?

A: O vermelho [coloca toda a seqüência: branco, preto, verde, vermelho, azul e amarelo].

E: Por que você colocou o amarelo aqui?

A: Porque pra mim ele parece ser o mais pesado.

Indagamos sobre o peso amarelo porque o aluno não testou o amarelo com o azul, classificando logo o peso amarelo como o mais pesado.

Nessa atividade, como os alunos podem fazer comparações com as mãos, fica mais fácil fazer inferências sobre os pesos desconhecidos. Por isso criamos a atividade no computador para perceber como os alunos fazem as classificações sem poder fazer estimativa sobre ele.

Comparação aleatória

A aluna Vanessa utilizou essa estratégia, mas, quando perguntávamos sobre a relação dos pesos, começou a fazer comparações sistemáticas. Primeiramente, comparou com a mão todos os pesos, depois ficou comparando na balança os pesos aleatoriamente. Logo após, disse que a branca é a mais leve. Confrontamos:

A: [primeiramente pega todos os potes. Depois compara com a mão os potes entre si. Escolhe a branca para ser a mais leve].
E: Será que ela é a mais leve de todas?
A: É ó... mostra na balança [coloca uma a um na balança].
E: Qual o outro peso mais leve?
A: [pega o preto e coloca do lado da branca. Depois compara os outros pesos aleatoriamente].

Primeiramente, os alunos comparam os pesos com a mão e depois começaram a pesar aleatoriamente na balança, sem criar hipótese sobre se um é mais pesado do que todos ou um mais pesado que o outro.

A atividade seguinte mostra como os alunos fizeram a mesma atividade em um ambiente computacional.

4.2.5 Balança Seriada

Essa atividade simula uma balança de dois pratos com o objetivo de fazer com que as crianças comparem pesos desconhecidos. Essa atividade é semelhante à atividade anterior. O que a diferencia é por se desenvolver em um ambiente computacional, e o aluno, diferentemente da atividade passada, não pode fazer estimativas sobre um peso, já que não dá para pegar com a mão.

4.2.5.1 *Estratégias de resolução*

Nesse tópico, analisaremos as estratégias: uso de axioma, comparação sistemática e comparação aleatória. Para essa atividade, não fizemos a análise quantitativa, pois eram utilizadas em conjunto. Por exemplo, eles começavam a fazer comparações aleatórias, de acordo com os nossos questionamentos sobre como eles poderiam descobrir o peso mais rápido; começavam a fazer comparações sistemáticas. Nem sempre tínhamos uma situação que dava para utilizar o axioma, por isso mais um motivo da dificuldade de fazer a análise quantitativa.

<u>Uso de axioma</u>

Observemos a aluna Tatiana responde às nossas perguntas, mas quis fazer os testes na balança. Quando o aluno descobre as relações entre os pesos, não é necessário testá-lo na balança, mas, mesmo assim, em alguns casos, a aluna faz o teste.

E: Qual era a mais pesada a [letra] A ou a [letra] C?

A: A [letra] A

E: A [letra] D era mais leve ou mais pesada que a [letra] A?

A: Mais pesada.

E: Então a D é mais leve ou mais pesada que a C?

A: Mais pesada.

Mesmo sabendo que a letra D era mais pesada, a aluna fez o teste na balança para comprovar sua hipótese, entretanto, outras vezes, não quis fazer essa comprovação:

E: Se a B é mais leve que essa aqui [letra A] e a B é mais pesada que a C. A [letra] A é mais pesada ou mais leve que a C?

A: Mais pesada.

Dessa vez, ela disse que não precisava testar na balança o peso A com o C.

A aluna Amanda, no começo do jogo, fez comparações aleatórias, mas, em um momento de suas comparações, mediante uma pergunta, conseguiu responder ao axioma.

A: [coloca na balança o peso C com o D e fica pensando].

E: Qual deu o mais leve? O C ou o D?

A: O [pote] C.

E: E o [pote] C com o [pote] E? Qual era o mais leve [essa relação foi anterior a essa]?

A: Foi o C.

E: Será que o C é o mais leve de todos?

A: É.

A aluna afirmou que o pote C é o mais leve de todos, sem antes comparar com o resto dos pesos. Depois tirou todos os pesos e continuou a fazer outras comparações, perdendo, assim, a relação dos pesos descobertos.

Comparação sistemática

O aluno Marcos, querendo descobrir qual era o pote mais leve, escolheu as letras A e C para descobrir sua relação. Como o aluno viu que A é maior do que C, tirou o pote A e colocou o D. Percebendo que D era mais pesado, tirou o D e colocou o F. Como C ainda era o mais leve, tirou o F e colocou o E, como o C ainda é mais leve, comparou o B com o C (B > C), descobrindo assim que o peso C era o mais leve de todos.

Comparação aleatória

Como na atividade anterior, a aluna Vanessa aferiu aleatoriamente os pesos, sem criar uma estratégia para ordenar os pesos ou do maior para o menor ou vice e versa.

Quando começou a jogar, primeiramente colocou o peso A com o C. Percebendo que o C era menor, tirou o C e colocou o B. O peso B ficou mais leve do que o A também. A lógica seria tirar o B também, já que ele é mais leve e a aluna da vez passada tirou o mais leve; mas ela tirou o peso A e colocou o peso E. Agora a relação na balança ficou E > B. A aluna, desta vez, tirou o mais leve (peso B) e colocou o peso F. A relação na balança ficou E > F, a aluna tirou novamente o mais leve e colocou o peso D (E > D). Nesse instante, já deu para perceber que a letra E é mais pesada do que B, F, D, mas a aluna não comparou o peso E, com os demais, tirou os pesos E e D da balança e testou o peso A com o D.

Geralmente essa estratégia é utilizada no começo da atividade para que os alunos entendam a lógica do programa. Depois, ao longo da atividade, os alunos vão percebendo como devem proceder e fazer as comparações.

Os dados aqui analisados nos mostram como podemos trabalhar e fazer com que os alunos comecem a pensar algebricamente mesmo no terceiro ano. Notamos ainda, que os alunos apresentaram uma evolução durante as atividades.

Analisando as atividades propostas, percebemos que algumas delas favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico, como, por exemplo, as situações-problemas, quando os alunos começam a usar símbolos ou desenhos para representar a situação proposta e explicam mentalmente seu pensamento. As atividades no objeto de aprendizagem Balança

Interativa e Balança Seriada também favorecem esse pensamento, pois trabalham com incógnitas, equações e inequações. Essas atividades se diferenciam das balanças de dois pratos, pois é exigido o emprego de outra lógica diferente de estimar dos valores do peso.

De posse dos indicadores, no próximo capítulo, faremos um apanhado geral de todas as atividades.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> Pesquisa é um processo de trabalho em espiral que começa com um problema ou uma pergunta e termina com um produto provisório capaz de dar origem a novas interrogações (MINAYO, 1994: 26).

Chegamos por fim ao inicio de tudo; ou, então, ao começo de novas indagações. Começamos o trabalho com muitas dúvidas que hoje podem ser respondidas. Saímos, entretanto, com muitas outras. Relembrando os objetivos iniciais, refletimos a idéia de que, além de alcançá-los, surgiram muitas perguntas para novos estudos.

O objetivo geral deste estudo foi investigar o pensamento algébrico de alunos das séries iniciais durante a utilização de objetos de aprendizagem (OA). Especificamente, o objetivo foi elaborar atividades, com e sem o uso de computador, que ajudem na formulação desse pensamento, verificar como objetos de aprendizagem e outras atividades podem favorecer a elaboração dos conceitos algébricos, como, por exemplo, equivalência, incógnita, igualdade e desigualdade, e identificar como as crianças formulam suas hipóteses acerca das atividades.

Para isso, refletimos sobre as pesquisas elaboradas sobre o tema e discutimos a importância de aprender conceitos relacionados à Álgebra já no ensino fundamental. Em continuidade, elaboramos atividades e empregamos outras utilizadas em diferentes estudos. Criamos atividades com a balança de dois pratos, re-utilizamos as atividades dos pesquisadores Schiliemann, Carraher, Pendexter, e Brizuela (1999) e as atividades no O.A Balança Interativa e Balança Seriada.

Nossa análise categorizou as estratégias utilizadas durante cada atividade, assim como as dificuldades e o desempenho. No decurso da análise, demos maior importância ao fato de categorizar as estratégias utilizadas do que classificar o desempenho dos alunos, pois a forma de raciocínio deles sobre o problema proposto é mais importante do que apenas seu acerto ou erro. Para entender esse raciocínio, fizemos a análise das entrevistas conduzidas com os alunos.

Na atividade das situações-problema, os resultados indicam que a maioria dos alunos entende as relações nos problemas, independentemente de mostrarem ou não as quantidades.

Nos problemas com quantidades, os alunos preferiam escrever cálculo em vez de raciocinar sobre as transformações que ocorriam no problema. Já para resolver os problemas nas quais não estão explícitas as quantidades, alguns alunos tiveram dificuldades, pois argumentavam que não dava para resolver problemas sem números. Quando, porém, eram instigadas por nós, elaboravam estratégias de representação como o uso de letras ou símbolos para resolver o problema. Essa tendência de achar que precisam de número para resolver um problema pode ser uma conseqüência do treinamento aritmético, que focaliza principalmente procedimentos escritos.

Comparando as atividades manipulativas com as propostas no OA, destacamos a vantagem de usar o computador, simulando uma balança de dois pratos, porque o aluno tem a possibilidade de criar hipóteses sobre a relação dos pesos, sem usar um valor aproximado a partir do seu peso real. Isso acontece porque, na balança de dois pratos, o aluno pode sentir e testar o peso com a mão, e no computador isso não é possível.

Analisando todas as atividades, observamos que os alunos tiveram participação e mostraram-se motivados a responder e interagir com as questões propostas. Demonstraram poucas dificuldades ao trabalhar com situações que não estão acostumados. Por exemplo, ao longo do estudo percebemos nas atividades de situações-problemas que os alunos utilizaram cálculo mental e tiveram bom desempenho durante a atividade, demonstrando capacidade em realizar relações com partes desconhecidas. Ao classificar potes na balança de dois pratos, os alunos operavam e faziam relações sobre pesos desconhecidos. Essas atividades possuem um contexto diferente do que costumam trabalhar em sala de aula. As dificuldades apresentadas correspondem àquilo que eles estão aprendendo na série, como, por exemplo, somar, subtrair e comparar pesos maiores e menores.

Quando os alunos sentiam dificuldades em fazer e comparar relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, estas eram superadas, na maioria das vezes, quando fazíamos com que o aluno refletisse ou explicasse sua resposta. Nesse sentido, percebemos a importância de os professores darem mais “voz” aos alunos e fazerem com que reflitam sobre suas respostas. Quando os alunos são motivados a buscar soluções e os professores trabalham com os conhecimentos prévios, isto pode levar a uma aprendizagem significativa.

Como os alunos são motivados a explicar seus pensamentos e fazer manipulações com materiais didáticos, criam hipóteses e, ao mesmo momento, fazem refutações sobre elas. Além disso, ao utilizar os materiais manipulativos e os objetos de aprendizagem, eles vivenciam diferentes situações, o que os conduzem a desenvolver o pensamento algébrico. Assim, durante a análise das transcrições, observamos que os alunos trabalham com conceitos algébricos quando falam sobre a igualdade ou desigualdade de relações; e quando analisam intervalos para descobrir possíveis pesos.

Assim, segundo Thompson (1995), criar atividades que dêem significados aos conteúdos propostos deveria ser a principal preocupação dos professores. Para ele, “é emocionante pensar em toda a matemática que as crianças pequenas serão capazes de aprender se forem ensinadas através de uma seqüência que esteja em consonância com suas próprias necessidades de desenvolvimento.” (p. 88).

Por isso a preocupação em elaborar atividades que estimulem o aluno a criar significados ao conceito algébrico. Segundo Usiskin (1995), a atividade algébrica consiste em quatro concepções: a Álgebra como generalizações de modelo, como estudo de procedimentos, estudo de relações entre grandezas e estudo das estruturas.

Usiskin (1995), explica a Álgebra como generalização de modelo com base nas atividades em que os alunos são levados a traduzir alguma linguagem matemática em uma sentença numérica. Por exemplo, quando se generaliza a seguinte situação matemática – o produto de qualquer número por zero é zero – estamos também trabalhando com a noção de incógnita para a expressão “para todo n, n x 0 = 0”. Portanto, podemos generalizar modelos, tanto em atividades aritméticas como algébricas.

Quando trabalhamos com o seguinte problema: “Ache o número que, adicionando 5 ao quíntuplo dele, a soma é 40”; quando descobrimos o modelo: $5x + 5 = 40$, já achamos o modelo da situação proposta; mas, se temos que continuar a resolver o problema e achar o valor do número, estamos trabalhando com a concepção de Álgebra como estudo de procedimentos.

Consoante Usiskin (1995), a Álgebra como estudo de relações consiste em fazer um trabalho com que os alunos possam argumentar, fazer parâmetros e relacionar quantidades. Para o autor, a Álgebra como estudo das estruturas, é baseada em atividades nas quais o aluno trabalhe com situações em que ele possa manipular e justificar seu pensamento.

As atividades elaboradas tiveram como objetivo fazer com que os alunos utilizassem essas concepções. Podemos relacionar as atividades na balança de dois pratos (medindo pesos) e, principalmente, ao utilizarem a estratégia de axiomas na Balança Seriada, com a idéia de generalização de modelos. Por exemplo, na atividade da balança de dois pratos (medindo pesos), quando perguntávamos: que número acrescentamos nesse lado da balança para ficar igual? Ou então: Que peso teremos que acrescentar nesse prato, que já há uma garrafa, para ficar igual a um quilo? O aluno foi levado a generalizar uma situação para poder achar o valor dos pesos. Quando eram levados a resolver a situação, estavam trabalhando com a concepção de Álgebra como estudo de procedimentos.

Quando os alunos resolviam as questões das situações-problemas, estavam generalizando o modelo daquela situação e desenvolvendo um procedimento algébrico, pois essa atividade tem o objetivo de simplificar e resolver relações entre grandezas. Em todas as situações-problemas os alunos raciocinavam sobre as relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas. Durante a manipulação e resolução dos exercícios, os alunos puderam entrar em contado com as primeiras noções algébricas, principalmente quando falamos em pensar sobre as estruturas de uma equação e trabalhar com o sentido relacional; ou seja, as atividades aqui trabalhadas estimulam os alunos a fazer relações entre quantidades e entender o sentido do sinal de igual nas tarefas que envolvem o pensamento algébrico. Além disso, em todas as atividades propostas, os alunos eram levados a argumentar seu pensamento, justificando como fizeram e encontraram as relações entre as quantidades.

Os resultados apresentados em nossa análise indicam a importância da criação de atividades que trabalhem com as noções algébricas, como igualdade, desigualdade, incógnita e variável. Por ser um estudo pouco explorado no meio acadêmico, sentimos necessidade de examinar como essas atividades são propostas no contexto da sala de aula e como o professor faz a mediação das atividades.

Apesar de termos desenvolvido atividades, nosso estudo se limitou a poucos alunos. Outras pesquisas devem ser desenvolvidas, com o intuito de ampliar as atividades, a quantidade de alunos e desenvolver metodologias para o ensino.

Devemos agora nos focar na questão do ensino-aprendizagem. O que propomos como estudos posteriores é investigar: como os professores podem ser capacitados para trabalhar com atividades algébricas nas séries iniciais do Ensino Fundamental? De que modo os professores trabalham com esses conceitos? Como os alunos interagem dentro de sala de aula com essas atividades? Faz-se necessário que o professor se engaje nas atividades, mediante um acompanhamento, e que participe diretamente na atividade, intervindo de acordo com as necessidades e dificuldades dos alunos.

Este estudo, certamente, ajudará outros pesquisadores a desenvolver novas atividades que, além de levar os alunos das séries iniciais a pensar algebricamente, possam trabalhar com outros assuntos conteúdos restritos às séries posteriores. O importante é aprimorar atividades que dêem suporte ao ensino e façam ligações reais com o conteúdo formal visto em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, F. J. **Educação e Informática**: os computadores na escola. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1988.

ALMEIDA, M. E. **ProInfo: Informática e Formação de Professores**. Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério de Educação, Seed, 2000.

ARAÚJO, C, R., BRITO LIMA, A. P., DA ROCHA FALCAO, J. T, LESSA, M, M, L., OLIVEIRA, M & LEITÃO, S., **Negotiating algebraic sense-making in the context of student-student-teacher interaction activities.** III Conference for Sociocultural Research. UNICAMP, Contion Center, Campinas, São Paulo, Brasil, (2000).

BELLONI, M. Luiza. **Educação à distância.** 2a ed. Campinas, SP: Cortez: Autores Associados, 2001.

BENAKOUCHE, R. **A questão da Informática no Brasil.** São Paulo: Brasiliense, 1985.

BITAR, M & CHAACHOUA, H. Integração de um software para a aprendizagem da Álgebra: APLUSIX. In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. **Anais de VII ENEM**. Recife: Videolar, 2004. 1 CD.

BOOTH, R. L. Dificuldades das crianças que se iniciam com álgebra. In: COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual. 1995.

BORBA, M. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BORBA, M. C & PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3ª. Ed. Belo Horizonte: Autentica, 2003.

BRASIL, MEC/SEF. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – Introdução aos PCN. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998a.

________._________: **Matemática.** Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998b.

BRASIL, MEC/SEED. **Ministério da Educação.** Disponível em: <http://portal.mec.gov.br> Acesso em: 12/07/2007.

CARRAHER, D. W. **Divide and conquer:** software for exploring principles of higher arithmetic. Recife: Universidade Federal de Pemambuco, 1989.

__________ . A Aprendizagem de conceitos matemáticos com auxílio do computador. IN: **Novas contribuições da Psicologia aos processos de ensino e aprendizagem.** ALENCAR, Eunice M.S Soreano de Alencar (organizadora). São Paulo: Cortez, 1992.

CARRAHER, T., CARRAHER, D.W. & SCHILIEMANN, A.D. **Na vida Dez na Escola Zero.** São Paulo: Cortez, 1988.

CASTRO, R. M. **Educação Algébrica e Resolução de Problemas.** Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/index.htm>. Acesso em: 10 nov. 2005.

CASTRO-FILHO, J.A., GOMES, A.S., BARRETO, M.C. e LIRA, A.K.M. **Identificação de dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental.** Relatório final da Pesquisa SPAECE-MAT. Universidade Federal do Ceará. Secretaria da Educação Básica do Estado do Ceará.

CASTRO-FILHO, J.A., LEITE, M.A., FREIRE, R. S. & PASCHOAL, I.V.A. **Balança Interativa: um software para o ensino da Álgebra.** In: XVI Encontro de Pesquisa Educacional das Regiões Norte e Nordeste (EPENN), Aracaju, 2003

CASTRO-FILHO, J. A., LEITE, M. A., FREIRE, R. S. & MACEDO, L. N. **Cartas Interativas: desenvolvendo o pensamento algébrico mediado por um software educativo.** In: XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. In: Workshop de Informática na Escola - WIE/SBC 2005, São Leopoldo, 2005.

CEARÁ. **Relatório final.** Universidade Federal do Ceará, Departamento de Fundamentos da Educação. Fortaleza, CE, 1998.

COLL, César. Construtivismo e educação: a concepção construtivista do ensino e da aprendizagem. In: COLL, C, MARCHESI, A, PALACIOS, J e col. **Desenvolvimento psicológico e educação**. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2004.

CORTES, A., KAVAFIAN, N. and VERGNAUD, G. **From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process**. Proceeding of the fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education, pp 27-34, México, 1990.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática** – da Teoria à Prática. 2. ed. Campinas, Editora Papirus,1997.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A Álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs) **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

DELVAL, J. **Introdução à prática do método clínico: descobrindo** o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002.

DENNIS, D. & CONFREY, J. Drawing logarithmic curves with Geometer's Sketchpad: A method inspired by historical sources. In J. R. KING, and D. SHATTSCHNEIDER, (eds.). **Geometry turned on.** (pp. 147-156). Washington: DC: The Mathematical Association of America, 1997.

FALZETTA, R. Á-bê-cê da Álgebra. **NOVA ESCOLA**, São Paulo, ano XVII, no. 116, pp. 30-32, Outubro de 2003.

um paralelo entre escola pública e particular. In: XX Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. Anais do XX Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa, Fortaleza, 2002.

FREIRE, R. S., LEITE, M. A., CABRAL, B. S., PASCHOAL, I. V. A. ; CASTRO-FILHO, J. A. **Estratégias Encontradas durante atividades com software e manipulativos.** In: II Jornada de Educação Matemática do Ceará. A Formação Pedagógica do Professor de Matemática, Fortaleza, 2003.

FREIRE, R. S., LEITE, M. A., CASTRO-FILHO, J. A. **Balança Interativa: um software para o ensino da álgebra.** In: XVI EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste. Anais do XVI EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste: Educação, Pesquisa e Diversidade Regional, Fortaleza, 2003.

FREIRE, R. S., VASCONCELOS, N. P. e CASTRO-FILHO, J. A. **Resultados de uma avaliação de alunos do I e II ciclo em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.** In: XXI Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa, Anais do XXI Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa, Fortaleza, 2002.

INEP/MEC, SAEB 2001 – **Novas Perspectivas**, Brasília, DF, 2004.

KAPUT, J. Democratizing access to calculus. In A. Schoenfeld (Ed.), **Mathematical thinking and problem solving.** (pp. 77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1994.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

LEITE, M. A, FREIRE, R. S., PASCHOAL, I. V. A., CABRAL, B. S. & CASTRO FILHO, J. A. (2003) **Estratégias Encontradas durante atividades com software e manipulativos**. In: II Jornada de Educação Matemática do Ceará, 2003, Fortaleza. A Formação Pedagógica do Professor de Matemática.

LESSA, M.M.L. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra**: um estudo comparativo. Dissertação de Mestrado. UFPE. Recife, 1996.

LINS, R. C e GIMENEZ, J. (1997). **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas, SP: Papirus Editora.

MEIRA, L. Atividade algébrica e produção de significados em matemática: um estudo de caso. In: DIAS, M. G & SPINILLO, A. G. (org). **Tópicos em Psicologia Cognitiva.** Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996.

OLIVEIRA, Ramon de. **Informática Educativa** Campinas, SP: Papirus Editora, 1997.

PATTO, M. H. S. **A produção do Fracasso Escolar.** São Paulo: T. A. Queiroz, 1996.

PIAGET, J e INHELDER, B. **A Psicologia da Infância**. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil. 13ª. Ed. 1994.

PINTO, G.A.T. **A atribuição de significado em atividades pré-algébricas por crianças do segundo ano do primeiro ciclo do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2001

RAMOS, E. M. F (org.). **Informática na escola:** um olhar multidisciplinar. Fortaleza: Editora UFC, 2003.

RIBEIRO, R. Pré-Álgebra: a garotada vai tirar de letra o X da questão. **NOVA ESCOLA**, São Paulo, ano XX, no. 183, 28-29, Julho de 2005.

SCHAPPO, G. & PONTE-FILHO, M. H. L. **Erros cometidos por alunos do primeiro e segundo ciclos em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas**. Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste – EPENN, Aracaju, 2003.

SCHLIEMANN, A.D., CARRAHER, D.W., PENDEXTER, W., & BRIZUELA, B. **Solving Algebra Problems before Algebra Instruction.** Paper presented at the Second Early Algebra Meeting, Tufts University/UMass-Dartmouth, 1998.

SILVEIRA, M. J., FREIRE, R. S., CASTRO-FILHO, J. A. **O uso de um software educativo para trabalhar conceitos algébricos.** In: XXI Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. Anais do XXI Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa, Fortaleza, 2002.

SPINILLO, A. G. Proporções nas Séries Iniciais do Primeiro Grau. Em Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs) **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

TAVARES, R**. Metodologia de desenvolvimento de objetos de aprendizagem com foco na aprendizagem significativa.** Anais do XVII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação – SBIE, Brasília, 2006

USISKIN, Z. Dificuldades das crianças que se iniciam com a álgebra. In: COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual. 1995.

VASCONCELOS, Leila. Problemas de Adição e Subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. In: SCHLIEMANN, A & CARRAHER, D. (orgs.). **A compreensão de conceitos aritméticos:** Ensino e pesquisa. Campinas, SP: Papirus, 1998.

VASCONCELOS, N. P, FREIRE, R. S. & CASTRO-FILHO, J. A. **Investigando o desempenho em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.** Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste – EPENN, Aracaju, 2003.

VALENTE, José Armando (org.) **Computadores e Conhecimento:** repensando a educação. Campinas, UNICAMP/NIED, 1998.

VALENTE, J. A. & ALMEIDA, F. J. Visão Analítica da Informática na Educação no Brasil: a questão da formação do professor. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, número 1, pp. 45-60, 1997.

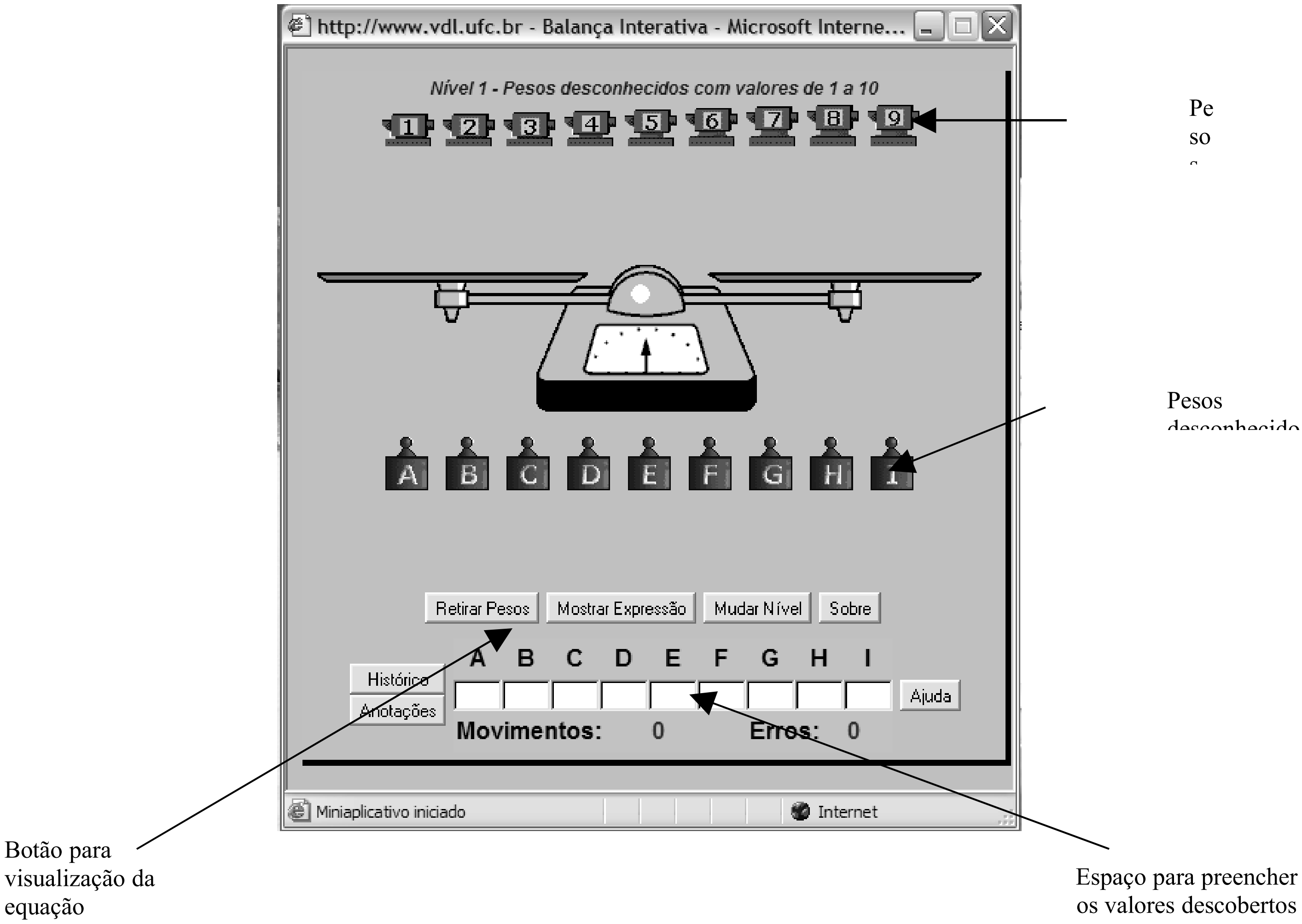
VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques.** vol. 10, n 2.3, pp. 133-70, 1990.

VERGNAUD, G. **The nature of mathematical concepts.** In T. Nunes e P. Bryant (Eds.), pp. 5-28, 1997.

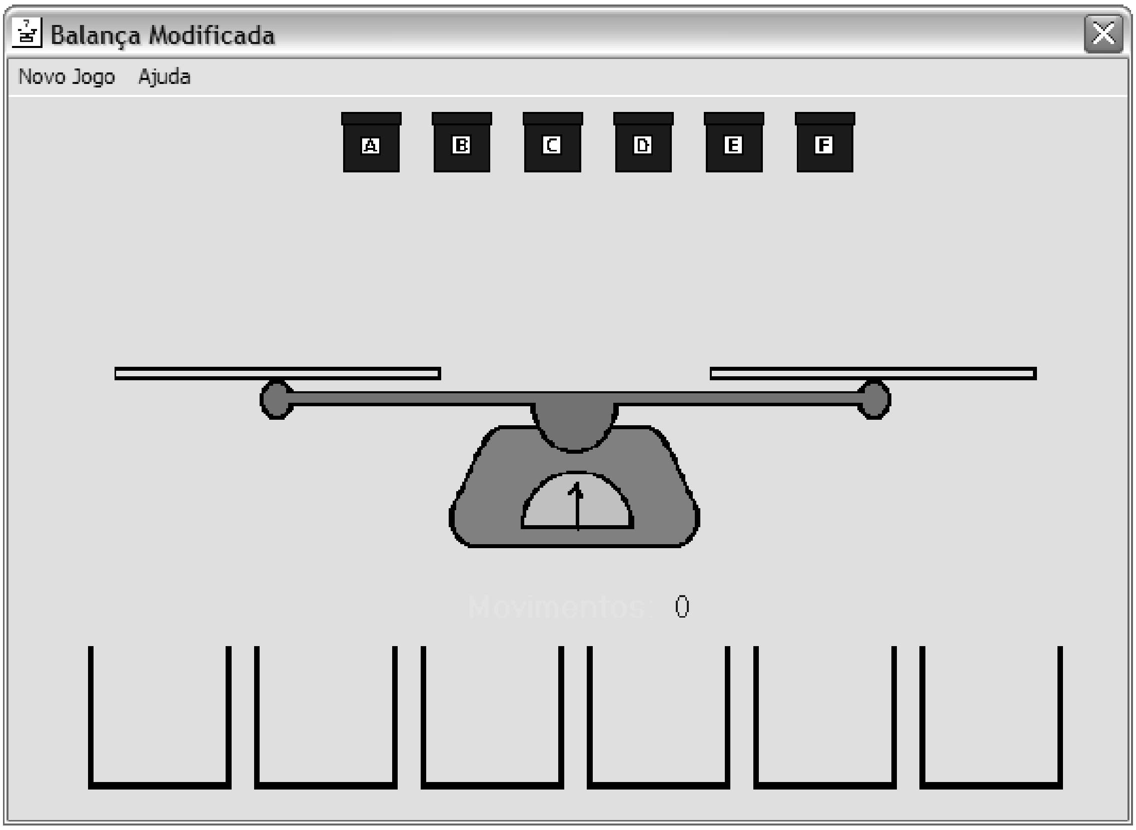
ANEXOS

ANEXO 1

Tela do Programa Balança Interativa no Nível 1



ANEXO 2
Tela do Programa BalançaSeriada



ANEXO 3
Situações-Problemas

Nome: ______________________________ Série: ________ Idade: _____

1. Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Brunon levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tiago levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tiago comeu 2 de seus chocolates e Bruno comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa de que após o recreio Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que Bruno? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro?

2. Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes como Bárbara?

3. Patrícia e Daniel são brincando fora da vizinhança. Como os dois gostam de laranja, foram nas suas casas pegar laranja. Patrícia pegou 6 laranjas e Daniel pegou 3. Depois eles voltaram para suas casas pegar mais laranja. Patrícia pegou mais 4 laranjas e Daniel pegou mais 3. Daniel voltou pela terceira vez na sua casa e retornou com mais 4 laranjas. Nessa hora chegou um amigo deles e Patrícia deu para esse amigo 6 laranjas e Daniel deu 3 laranjas. Você acha que, agora, depois de eles terem dado algumas laranjas Patrícia e Daniel tem a mesma quantidade de laranjas? Ou você acha que um tem mais laranja que outro?

4. João e Sara estão brincando de bolas de gudes. João pegou 4 bolas de gudes do seu bolso esquerdo para brincar. João pegou então mais 4 bolas de gudes do seu bolso direito para brincar. Sara levou 8 bolas de gudes da sua coleção para brincar. Durante o jogo, Sara ganhou mais 2 bolas de gudes. João também ganhou 2 bolas de gude durante o jogo. Você acha que João tem a mesma quantidade de bolas de gude da Sara? Ou você acha que um tem mais bolas de gudes que outro?

5. Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo da manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

6. Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em uma cesta. Marcelo dividiu seus biscoitos em duas cestas. Então, eles pegaram um outro pacote. Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um depósito para comer depois. O irmão mais nova de Carlos foi na cozinha foi na cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu pra ela sua cesta de biscoito e Marcelo deu pra ela uma de suas cestas de biscoito. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que os outro?

7. Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Cláudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Cláudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Cláudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?

8. Em um fim de semana Lucas e Francisco foram pescar. No sábado eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do

que outro?